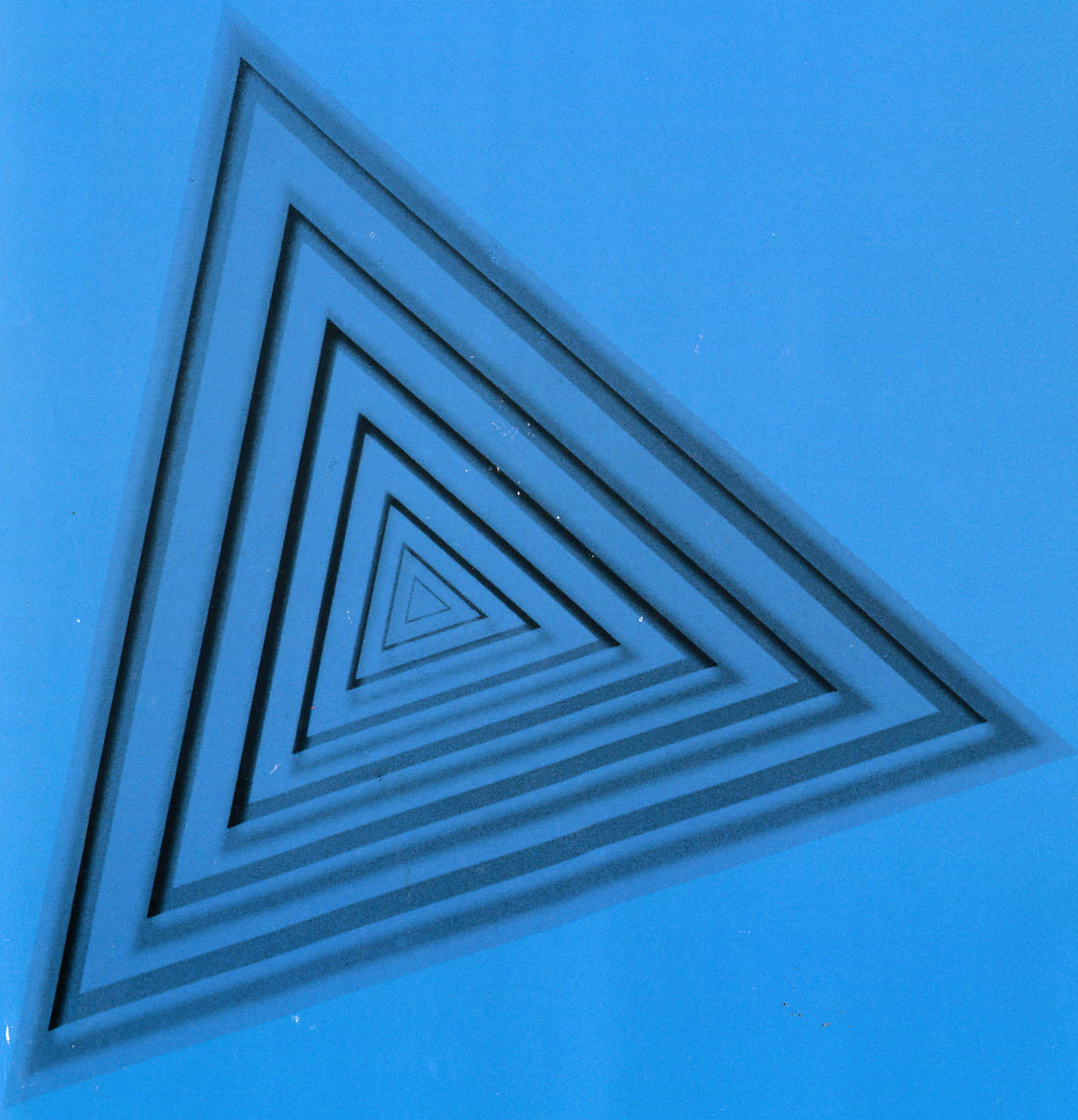
微分積分学の基礎

水本久夫 著

改訂版

培風館



微分積分学の基礎

水本久夫 著

改訂版

培風館

まえがき

この本は，新しく大学に入学したばかりの教養課程の学生たちを対象にして，彼らが，微分積分学を，できるだけわかりやすく，興味をもって学習することができるように書かれた教科書である．

高校の数学の教科書と大学の微分積分学の教科書をくらべてみると，一般的にいって，わかりやすさ，むつかしさの点で，かなりのへだたりがあることが目につく．このへだたりが，学ぶものの数学に対する興味を失わせる1つの要因と考えられる．この本では，できるだけそのようなへだたりをなくして，あまり抵抗を感ずることなく，高校での数学教育の延長として，円滑に，微分積分学を学ぶことができるように心をくばった．

昭和58年1月に，初版を発行させていただいて以来，永い間，多くのかたがたに，ご使用していただき，いろいろと有益なご指摘，ご助言をいただいた．そのようなご指摘，ご助言を参考にしながら，今回，改訂させていただくことになった．わかりやすく，興味をもって学習することができるという初版の精神を尊重しながら，初版より，より一層やさしく理解できるような内容になるように努めた．

この本は，高校の「数学 I」の範囲を予備知識として，理解することができるように書かれている．したがって，高校での「微分・積分」の課程をおえた人たちを対象に教える場合には，この本のある部分は省略して，先にすすむことができる．実際，著者もそのように実行しており，この本もそのことを心にとめながら書いた．どこを省略するかは，教える人の判断にゆだねたいが，1つの案としては，つぎの各節を省略する方法がある：

§1．極 限 値
§2．連 続 関 数
§3．導 関 数
§4．微分法の公式（4項の「パラメター表示された関数の微分」は教える）
§5．べきの微分

§6．3角関数の微分

§7．指数関数と対数関数の微分

§20．関数の増減と極値（定理 20.3 および 5 項の「極座標と極方程式」は教える）

§40．定積分と不定積分

§41．定積分の計算（例 6 は教える）

§42．平面図形の面積（2 項，3 項は教える）

§58．無限数列

§59．無限級数

省略することによって，本書の講義に要する総時間数を，かなり短縮することができるであろう．

各節（§1，§2，など）ごとにあげた**問**は，本文と直接関係のある基礎的ないしは基本的なものを採用し，本文の内容の理解を深めるように努めた．なお，**問題**については，

『微分積分学問題集（改訂版）』　（培風館発行）

が，この本と並行して出版される予定である．この問題集には，この本の節（§1，§2，など）の分類にもとづいて，問題を，

A: やさしい基礎的な問題，

B: 基本的で標準的な問題，

C: やや高度な問題および応用問題

の 3 つのクラスに分けて，豊富にのせてある．また，この本の章の分類にもとづいて，問題集の章末にも，適当な応用問題などをのせておいた．学ぶ人の理解の度合に応じて，クラスをえらんで，問題を解き，実力を養われることを望んでいる．

なお，この本の問題の中で，＊印をつけたものは，時間に余裕がある場合に，説明をくわえて教えるのに利用される候補としてあげたものである．

おわりに，この本の原稿を精読され，組版上の体裁をととのえることに尽力された江連千賀子さんに，心から感謝の意を表したい．

1992 年 12 月

著者しるす

目　次

7　2変数合成関数の微分

8　2変数のテイラーの定理

9　不 定 積 分

10　定 積 分

11　広義の積分

12　重 積 分

13　微分方程式

1

微 分 法†

§1. 極 限 値

1. 極 限 値　変数 x が a 以外の値をとりながら，a にかぎりなく近づくとき，関数 $f(x)$ の値が，一定の値 b にかぎりなく近づくならば，

x が a に近づくときの $f(x)$ の**極限値**は b である

といい，

(1.1)　　$\lim_{x\to a} f(x)=b$　または，　$f(x)\to b$　　$(x\to a)$

で表す.

例 1.　$f(x)=\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$.

この関数は，$x=a$ のときは，$\dfrac{0}{0}$ となって，定義されていない．しかし，

$x\neq a$ のときは，約分ができて，

$$f(x)=\frac{x^2-a^2}{x-a}=\frac{(x-a)(x+a)}{x-a}=x+a \quad (x\neq a).$$

したがって，

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a.$$

このように，$\lim_{x\to a} f(x)$ を求めるのに，$f(x)$ は，$x=a$ で定義されていなくてもよい（図 1.1）.　　　（例 1 終）

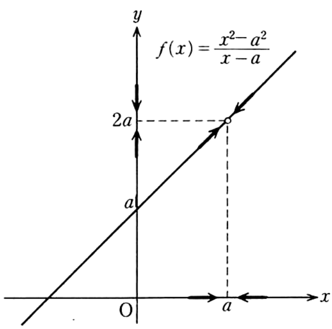


図 1.1

† §58 の無限数列（217 ページ）を先にやってから，第 1 章に入ってもよい．なお，この本の使い方について，「まえがき」を読んで参考にしていただきたい.

関数の極限値については，つぎの定理が基本的である:

定理 1.1　$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$ であるとき，

（i）　$\lim_{x\to a} cf(x)=c\alpha$　　（c は定数）;

（ii）　$\lim_{x\to a} \{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$,　　$\lim_{x\to a} \{f(x)-g(x)\}=\alpha-\beta$;

（iii）　$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$;

（iv）　$\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$　　（ただし，$\beta\neq 0$）.　　　**（極限値の基本定理）**

2. 極限値 ∞　　変数 x の値がかぎりなく大きくなることを，

$$x\to\infty \qquad \text{または} \qquad x\to+\infty$$

で表す．また，x が負の値をとりながら，その絶対値がかぎりなく大きくなることを，

$$x\to-\infty$$

で表す．

そのような場合に，関数 $f(x)$ について，

(1. 2)　　$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

の形の極限値も考える．

例 2.　$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

（例 2 終）

(1.1)式，または(1.2)式の極限値を考える場合，$f(x)$ の値がかぎりなく大きくなるとき，

$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

などで表す．また，$f(x)$ が負の値をとりながら，その絶対値がかぎりなく大きくなるとき，

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$$

などで表す．

例 3. $\lim_{x\to\infty}(x^3-243x^2+27x-729)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{243}{x}+\frac{27}{x^2}-\frac{729}{x^3}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}x^3\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{243}{x}+\frac{27}{x^2}-\frac{729}{x^3}\right)=\infty.$$

（例 3 終）

3. 右側(左側)極限値

x が a より小さい値から a に近づくことを，　$x\to a-0$

x が a より大きい値から a に近づくことを，　$x\to a+0$

で，それぞれ，表す．とくに，$a=0$ のときは，それぞれ，つぎのように表す:

$$x\to -0,\qquad x\to +0.$$

関数 $f(x)$ に対して，

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\alpha$$

を，$f(x)$ の a における**左側極限値**，

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\beta$$

を，$f(x)$ の a における**右側極限値**という(図 1.2)．これらの極限値を，それぞれ，$f(a-0)$, $f(a+0)$ で表す;

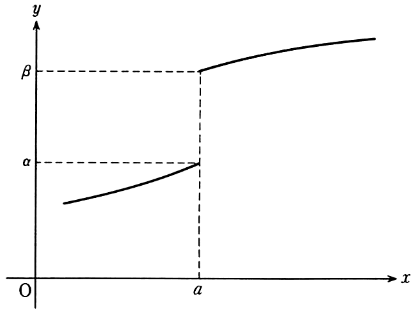


図 1.2

$$f(a-0)\equiv\lim_{x\to a-0}f(x),\qquad f(a+0)\equiv\lim_{x\to a+0}f(x).$$

これらの極限値が一致するとき，すなわち，

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)$$

ならば，$\lim_{x\to a}f(x)$ が存在することになる．

例 4. $\lim_{x\to+0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1,$

$$\lim_{x\to-0}\frac{x}{|x|}=\lim_{x\to-0}\frac{x}{-x}=-1$$

(図 1.3).

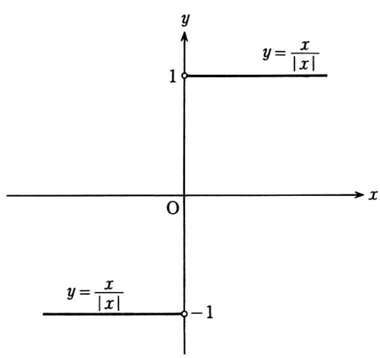


図 1.3

$$(1.3)\quad \operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & (-\infty<x<0),\\ 0 & (x=0),\\ 1 & (0<x<\infty)\end{cases}$$

によって定義される関数を**符号関数**という．そのとき，

$$\operatorname{sgn}x=\frac{x}{|x|}\qquad (x\neq 0).$$

（例 4 終）

問 1. つぎの極限値を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-4x+3}{x^3-1}$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{x}{x-1}$.　　(4) $\displaystyle\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.　　(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{5x^2+x+7}$.

(7) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-3)(5x-6)}{(4x+1)(6x+3)}$.　　(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^2+1}$.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.　　(10) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}$.

＊**問 2.** つぎの極限値は存在するか？ 存在すれば，その極限値を求め，存在しないならば，その理由を述べよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin x$.　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin\frac{1}{x}$.　　(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}$.

§ 2. 連 続 関 数

1. 連 続 関 数　関数 $f(x)$ が，つぎの 3 つの条件をみたすとき，$f(x)$ は**点 $x=a$ で連続**であるという:

(i) $x=a$ は $f(x)$ の**定義域**（定義されている点の集合）に属している（$f(a)$ が存在する）;

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ が存在する;

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)$ と $f(a)$ が等しい;

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a) \qquad (図 2.1).$$

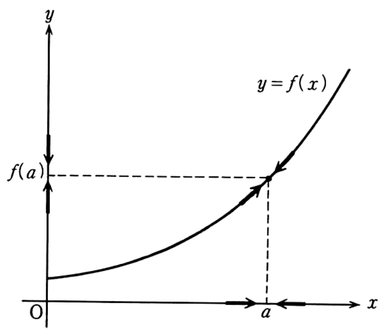


図 2.1

関数 $f(x)$ が**開区間** (a, b)（$a<x<b$ をみたす x の範囲）のすべての点で連続であるとき，$f(x)$ は**開区間 (a, b) で連続**であるという.

閉区間 $[a, b]$（$a\leqq x\leqq b$ をみたす x の範囲）で定義された関数 $f(x)$ が，(a, b) で連続であって，

$$f(a+0)=f(a), \qquad f(b-0)=f(b)$$

であるとき，$f(x)$ は**閉区間 $[a, b]$ で連続**であるという.

定理1.1から，つぎの定理がえられる:

定理 2.1 $f(x)$, $g(x)$ が $x=a$ で連続ならば，

（i） $cf(x)$ （c は定数）;

（ii） $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$;

（iii） $f(x)g(x)$;

（iv） $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ （$g(a)\neq 0$）

は，それぞれ，$x=a$ で連続である． **（連続関数の基本定理）**

証明 定理1.1で，$\alpha=f(a)$, $\beta=g(a)$ とおけばよい． （証明終）

2. 合成関数 関数 $u=f(x)$ の**値域**（関数の値の集合）をふくむ範囲で定義された関数 $y=g(u)$ に対して，**合成関数** $y=g\circ f(x)\equiv g(f(x))$ が定義される．

定理 2.2 $u=f(x)$ が $x=a$ で連続で，$g(u)$ が $b=f(a)$ で連続ならば，合成関数 $g(f(x))$ は $x=a$ で連続である; すなわち，

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g(f(a)).$$

証明 $u=f(x)$ は $x=a$ で連続だから，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)=b.$$

$y=g(u)$ は $u=b$ で連続だから，

$$\lim_{u\to b} g(u)=g(b).$$

したがって，

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g(b)=g(f(a)).$$ （証明終）

3. 単調関数・逆関数 $f(x)$ が，ある区間の任意の x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ に対して，

$$f(x_1)<f(x_2)$$

であるとき，$f(x)$ はその区間で**増加の状態**にあるという（つぎのページの図2.2）．また，ある区間の任意の x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ に対して，

$$f(x_1)>f(x_2)$$

であるとき，$f(x)$ はその区間で**減少の状態**にあるという（つぎのページの図2.3）．

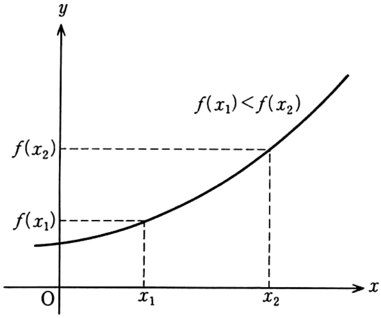


図 2.2 増加の状態

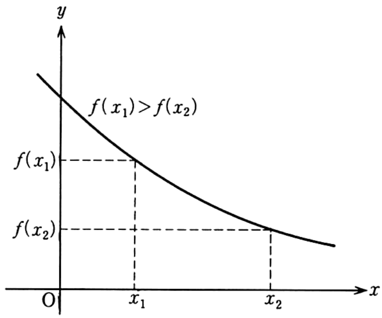


図 2.3 減少の状態

つねに増加(減少)の状態にある関数を**増加(減少)関数**という. 増加関数, 減少関数を総称して, **単調関数**という.

単調関数 $y=f(x)$ は, つねに, 逆関数 $y=f^{-1}(x)$ をもち, それらのグラフは, 直線: $y=x$ に関して対称である(図 2.4, 図 2.5).

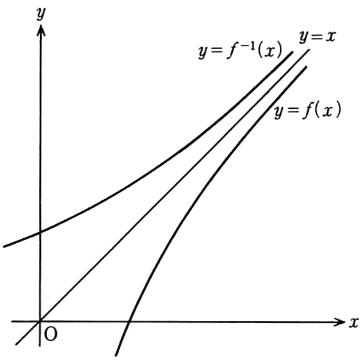


図 2.4 $f(x)$ が増加関数の場合

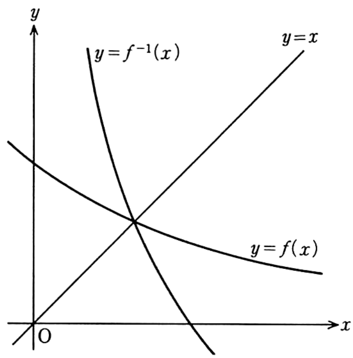


図 2.5 $f(x)$ が減小関数の場合

つぎの定理は, 図 2.4, 図 2.5 によって, 直観的に明らかであるが, 解析的にも証明される.

> **定理 2.3** 連続な増加(減少)関数 $y=f(x)$ の**逆関数** $y=f^{-1}(x)$ は, 連続な増加(減少)関数である.

問 1. つぎの関数のグラフをかき, $x=0$ における連続性を調べよ:

(1) $|x|$. (2) $\dfrac{x^2}{x}$. *(3) $\mathrm{sgn}\, x$.†

† 定義式 (1.3) (3 ページ)参照.

（4） $x \operatorname{sgn} x$.[†]　　（5） $\dfrac{1}{x}$.　　（6） $\dfrac{x^2+x}{|x|}$.

＊問 2. $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x+1}$ について,

（1） $f(x)$ の定義域を求めよ.

（2） $f(x)$ の連続性を調べよ.

＊問 3. 実数 a に対して, $n \leqq a$ をみたす整数 n の中で最大のものを $[a]$ と書き, これを**ガウスの記号**という. そのとき,

（1） $f(x)=[x]$ のグラフをかけ.

（2） $f(x)=[x]$ の連続性を調べよ.

§3. 導関数

1. 微分係数　関数 $y=f(x)$ について, x が a から $a+h$ までかわる間の, x の値の変化 (x の**増分**とよぶ): $\Delta x=h$ (h は負であってもよい) に対する, y の値の変化 (y の増分): $\Delta y=f(a+h)-f(a)$ の割合:

(3.1)　$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を, x が a から $a+h$ までかわる間の $f(x)$ の**平均変化率**という (図 3.1).

ここで, h をかぎりなく 0 に近づけたとき, 平均変化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ が, あるきまった値にかぎりなく近づくならば; すなわち, 極限値:

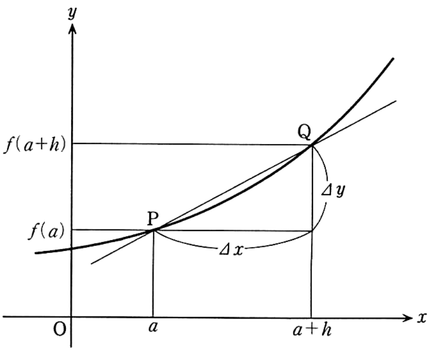


図 3.1

(3.2)　$$f'(a) \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$ [††]　**(微分係数の定義式)**

が存在するならば, この $f'(a)$ を, 関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における**微分係数**といい, $f(x)$ は $x=a$ で**微分可能**であるという.

---

† 定義式 (1.3) (3 ページ) 参照.

†† 記号 ≡ は, 左辺と右辺が恒等的に等しいことを表す場合と, 左辺の式が右辺の式によって定義されることを表す場合がある. ここでは, 後者の場合である.

微分係数の幾何学的意味は重要である．平均変化率 (3.1) は，図 3.1 において，直線 PQ の傾きを表している．ここで，h をかぎりなく 0 に近づけると，点 Q は曲線 $y=f(x)$ 上を動きながら点 P にかぎりなく近づく．このとき，直線 PQ の**傾き**(平均変化率)は，$x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に近づくから，直線 PQ は，傾きが $f'(a)$ であるような直線 PT にかぎりなく近づく (図 3.2)．この直線 PT を，曲線 $y=f(x)$ の点 $P(a,b)$ $(b=f(a))$ における**接線**という．

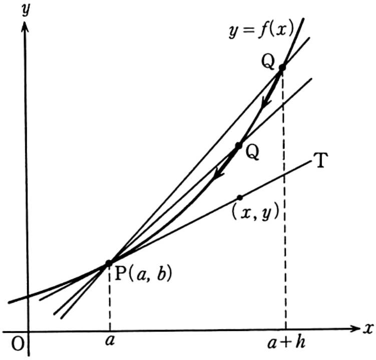


図 3.2

接線 PT の方程式は，点 $P(a,b)$ をとおって，傾きが $f'(a)$ である直線として，

(3. 3)	$y-b=f'(a)(x-a)$	$(b=f(a))$	**(接線の方程式)**

によって表される (図 3.2)．

例 1. $y=f(x)=x$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)-a}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

直線: $y=x$ 上の点 (a,b) をとおる接線の方程式は，(3.3) 式によって，

(3. 4) $y-b=1\cdot(x-a)=x-a$.

$b=a$ だから，(3.4) 式は，もとの直線: $y=x$ と一致する (図 3.3)． (例 1 終)

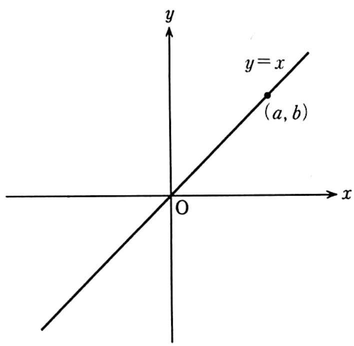


図 3.3

例 2. $y=f(x)=x^2$.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a.$$

曲線: $y=x^2$ 上の点 (a,b) における接線の方程式 (図 3.4) は，(3.3) 式によって，

$$y-b=2a(x-a).$$

$b=a^2$ に注意すれば，

$$y+b=2ax. \quad \text{(例 2 終)}$$

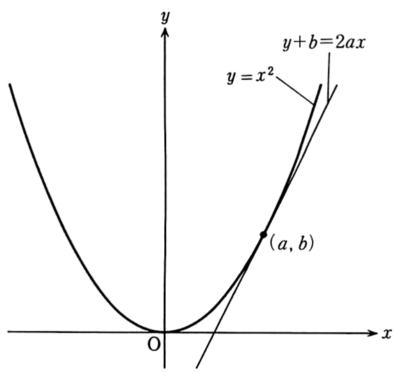


図 3.4

2. 右側(左側)微分係数　　極限値の場合と同様にして，

> **左側微分係数**:
> $$f'_-(a)\equiv\lim_{h\to-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$
> **右側微分係数**:
> $$f'_+(a)\equiv\lim_{h\to+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が定義される．両微分係数が一致するとき:

$$f'_-(a)=f'_+(a),$$

微分係数 $f'(a)$ が存在して，これらは一致する:

$$f'(a)=f'_-(a)=f'_+(a).$$

例 3. 左側微分係数と右側微分係数が一致しない例．

$f(x)=|x|$　　(図 3.5)．

$$f'_-(0)=\lim_{h\to-0}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{-h}{h}=-1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to+0}\frac{|h|-|0|}{h}=\lim_{h\to+0}\frac{h}{h}=1.$$

(例 3 終)

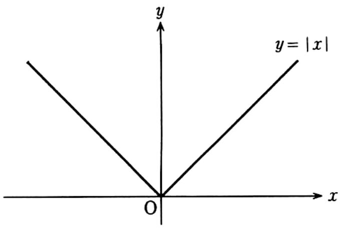


図 3.5

> **定理 3.1**　$f(x)$ が $x=a$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続である．

証明

$$\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=\lim_{x\to a}\{f(x)-f(a)\}$$
$$=\lim_{x\to a}(x-a)\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=0\cdot f'(a)=0.$$
$$\therefore\quad\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

(証明終)

3. 導 関 数　　$f(x)$ が開区間 (a, b) の各点で微分可能であるとき，$f(x)$ は**開区間 (a, b) で微分可能**であるという．

$f(x)$ が (a, b) で微分可能であって，$f'_+(a)$, $f'_-(b)$ が存在するとき，$f(x)$ は**閉区間 $[a, b]$ で微分可能**であるという．

$f(x)$がある区間で微分可能であるとき，その区間の各点に，その点における微分係数$f'(x)$を対応させたものを，xの関数とみなすことができる．そのとき，$f'(x)$を$f(x)$の**導関数**という．導関数を求めることを**微分する**という．$f(x)$の導関数を表す記号として，$f'(x)$のほかに，

$$y', \quad \frac{dy}{dx}, \quad \{f(x)\}', \quad \frac{df(x)}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad Df(x)$$

などが，用途に応じて用いられる．

例 4. $y=c$ （cは定数）.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{c-c}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

(3.5)	$\therefore \quad (c)'=0.$

したがって，定数関数の導関数は，恒等的に0である． (例4終)

例 5. 例1によって，$f(x)=x$の導関数は，$f'(x)=1$である:

(3.6)	$(x)'=1.$

(例5終)

例 6. 例2によって，$f(x)=x^2$の導関数は，$f'(x)=2x$である:

(3.7)	$(x^2)'=2x.$

(例6終)

問 1. つぎの関数を，微分係数の定義式(3.2)にしたがって微分せよ．また，つぎの関数で表される曲線上の点(a, b)における接線の方程式を求めよ:

（1） x^3.　　（2） $\frac{1}{x}$.　　（3） $\sqrt{x}$.

問 2. つぎの関数は，$x=0$で連続であるか？ また，微分可能であるか？

（1） $y=|x^3|$.　　（2） $y=|x^2+x|$.

＊問 3. つぎの関数は，$x=-1$, $x=1$で微分可能であるかどうかを調べよ:

$$f(x)=\begin{cases} 1 & (-\infty<x<-1), \\ x^2 & (-1\leqq x\leqq 1), \\ 2x-1 & (1<x<\infty). \end{cases}$$

§4．微分法の公式

1．和・差・積・商の微分の公式

定理 4.1　$u=f(x)$, $v=g(x)$ が微分可能ならば，つぎの公式がなりたつ：

（i）　$(cu)'=cu'$　（c は定数）；　**（定数倍の微分の公式）**

（ii）　$(u\pm v)'=u'\pm v'$　（複号同順）；　**（和・差の微分の公式）**

（iii）　$(uv)'=u'v+uv'$；　**（積の微分の公式）**

（iv）　$\left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$　$(v\neq 0)$；　**（逆数関数の微分の公式）**

（v）　$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$　$(v\neq 0)$．　**（商の微分の公式）**

証明　（i），（ii）は簡単である．

（iii）
$$(uv)'=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}g(x+h)+f(x)\{g(x+h)-g(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\lim_{h\to 0}g(x+h)+f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$$

（iv）
$$\left(\frac{1}{v}\right)'=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left\{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}\right\}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{g(x)-g(x+h)}{g(x)g(x+h)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{1}{g(x)g(x+h)}\right\}\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$
$$=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}.$$

（v）　（iii）と（iv）によって，
$$\left(\frac{u}{v}\right)'=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'$$
$$=f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)}+f(x)\left\{-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}\right\}$$
$$=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}.$$
（証明終）

例 1. $y=(x+1)(x^2+1)$.

積の微分の公式と和の微分の公式によって，

$$\begin{aligned}\{(x+1)(x^2+1)\}'&=(x+1)'(x^2+1)+(x+1)(x^2+1)'\\&=1\cdot(x^2+1)+(x+1)\cdot 2x\\&=3x^2+2x+1.\end{aligned}$$

(例 1 終)

例 2. $y=\dfrac{1}{x^2}$.

逆数関数の微分の公式によって，

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)'=-\frac{(x^2)'}{x^4}=-\frac{2x}{x^4}=-\frac{2}{x^3}.$$

(例 2 終)

例 3. $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$.

商の微分の公式と定数倍の微分の公式，和の微分の公式によって，

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{2x+1}\right)'&=\frac{(x^2)'(2x+1)-x^2(2x+1)'}{(2x+1)^2}\\&=\frac{2x(2x+1)-x^2\cdot 2}{(2x+1)^2}=\frac{2x(x+1)}{(2x+1)^2}.\end{aligned}$$

(例 3 終)

2. 合成関数の微分の公式

定理 4.2 $u=f(x)$がある区間で微分可能で，$y=g(u)$が$f(x)$の**値域**(関数値の集合)をふくむ範囲で微分可能ならば，合成関数$y=g(f(x))$は，もとの区間で微分可能であって，

$$\frac{dg(f(x))}{dx}=g'(f(x))f'(x);$$

すなわち，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

(合成関数の微分の公式)

証明 x の増分 $\Delta x=h$ に対する u, y の増分を Δu, Δy とする:

$$\Delta x=h,\qquad \Delta u=f(x+h)-f(x),$$

$$\begin{aligned}\Delta y&=g(f(x+h))-g(f(x))\\&=g(u+\Delta u)-g(u)\qquad (u=f(x)).\end{aligned}$$

そのとき，

$$\{g(f(x))\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=*.$$

ここで，定理 3.1 (9ページ)によって，$\Delta x=h\to 0$ のとき，$\Delta u=f(x+h)-f(x)\to 0$ となることに注意すれば，

$$* = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{g(u+\Delta u)-g(u)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= g'(f(x))f'(x).$$ (証明終)

例 4. $y=(x^2+1)^2$.

$u=x^2+1$ とおけば, $y=u^2$.

合成関数の微分の公式によって,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d(u^2)}{du}\cdot\frac{d(x^2+1)}{dx}$$

$$=2u\cdot 2x=2(x^2+1)\cdot 2x.$$

$$\therefore \quad \{(x^2+1)^2\}'=4x(x^2+1).$$ (例 4 終)

3. 逆関数の微分の公式

定理 4.3 微分可能な単調関数 $x=f(y)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ は, $f'(y) \neq 0$ であるかぎり, 微分可能であって,

$$\{f^{-1}(x)\}'=\frac{1}{f'(y)};$$

すなわち,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$ **(逆関数の微分の公式)**

証明 $\Delta x=h,\qquad \Delta y=f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)\qquad (y=f^{-1}(x))$

とおけば, 定理 2.3 (6 ページ) によって, $\Delta x=h\neq 0$ のとき, $\Delta y \neq 0$ であって,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}.$$

また, 定理 2.3 によって, $\Delta x=h\to 0$ のとき, $\Delta y=f^{-1}(x+h)-f^{-1}(x)\to 0$ となることに注意すれば,

$$\{f^{-1}(x)\}'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(y+\Delta y)-f(y)}{\Delta y}}=\frac{1}{f'(y)}.$$ (証明終)

例 5.　$y=\sqrt{x}$.

(4.1)　　$\therefore \quad x=y^2 \quad (y \geqq 0)$.

逆関数の微分の公式によって,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (y>0).$$

$$\therefore \qquad (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x>0).$$

あるいは, (4.1)式の両辺を x について微分すれば, 合成関数の微分の公式によって,

$$1=2y\cdot y'.$$

$$\therefore \qquad y'=\frac{1}{2y}=\frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad (x>0).$$ (例 5 終)

4. 関数のパラメター表示　x の関数 y を, **パラメター** t を媒介にして表示したもの:

$$x=\varphi(t), \qquad y=\psi(t)$$

を**関数のパラメター表示**という.

定理 4.4　$x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ が微分可能であって, $\varphi'(t)\neq 0$ であるとき,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$ **(パラメター表示された関数の微分の公式)**

証明　$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t), \qquad \Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)$

とおく. 定理 3.1 (9 ページ) によって,

$$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\to 0 \qquad (\Delta t\to 0)$$

であることに注意すれば,

$$\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{\Delta y}{\Delta t}}{\dfrac{\Delta x}{\Delta t}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\frac{dy}{dx}.$$ (証明終)

例 6. $x=pt^2,\quad y=2pt$
(p は正の定数).

これは, 放物線: $y^2=4px$ のパラメター表示 (図4.1). 定理4.4によって,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{2p}{2pt}=\frac{1}{t}\qquad(t\neq 0).$$

(例 6 終)

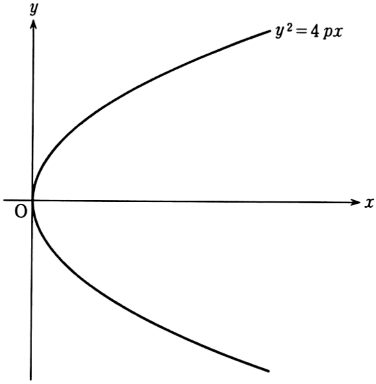


図 4.1

問 1. つぎの関数を微分せよ.

(1) $(3x+2)(x^2+1)$. (2) $(x+1)^2(2x-3)^3$.

(3) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3$. (4) $\dfrac{1}{x+2}$. (5) $\dfrac{1}{(x^2+1)^3}$.

(6) $\dfrac{x+1}{x-1}$. (7) $\dfrac{3x-1}{x^2+2}$. (8) $\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^3$.

(9) $\sqrt{1-x^2}$. (10) $\sqrt{(x+a)(x+b)}$ (a, b は定数).

(11) $x\sqrt{x+1}$. (12) $(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)$.

(13) $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$. (14) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$. (15) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (a は定数).

***問 2.** つぎの関数を, 例 5 のように, 2 通りの方法で, 微分せよ:

(1) $y=\sqrt[3]{x}$. (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

問 3. つぎのパラメター表示から $\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}. \end{cases}$$

***問 4.** xy-平面において, 初速度 v_0, 仰角 α で投げられた物体は, 重力以外の力が作用しないとすれば, 時間 t 後の位置 (x, y) は, つぎの式で表される:

$$x=(v_0\cos\alpha)t,\qquad y=(v_0\sin\alpha)t-\frac{1}{2}gt^2\quad (g \text{ は重力の加速度}).$$

そのとき, $\dfrac{dx}{dt}$, $\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{dy}{dx}$ を求め, その物理的意味を述べよ.

2

初等関数の微分

§5. べきの微分

1. べきの微分

(5.1)	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(n=1, 2, \cdots)$.

証明　帰納法によって証明しよう.

$n=1$ のとき,

$$(x)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

ゆえに, $n=1$ のときは正しい.

$n=k$ のとき, 正しいと仮定すれば, 積の微分の公式 (11 ページ) によって,

$$\begin{aligned}(x^{k+1})' &= (x^k x)' = (x^k)' x + x^k (x)' \\ &= kx^{k-1} x + x^k \cdot 1 \\ &= (k+1) x^k.\end{aligned}$$

したがって, $n=k+1$ のときも正しい.　(証明終)

(5.2)	$(x^{-n})' = (-n) x^{-n-1}$	$(n=1, 2, \cdots)$.

証明　$y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

公式(5.1)と逆数関数の微分の公式(11 ページ)によって,

$$y' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n) x^{-n-1}.$$　(証明終)

(5.3)	$(x^r)' = rx^{r-1}$	(r は有理数).

証明　$r=\dfrac{q}{p}$ (p, q は整数, $p>0$) とおけば,

$$y=x^r=x^{\frac{q}{p}}=\sqrt[p]{x^q}.$$

この両辺を p 乗して,

$$y^p=x^q.$$

合成関数の微分の公式 (12ページ), および (5.1)式, (5.2)式を利用して, この両辺を x について微分すれば,

$$py^{p-1}y'=qx^{q-1}.$$

$$\therefore \quad y'=\frac{q}{p}\cdot\frac{x^{q-1}}{y^{p-1}}=\frac{q}{p}\cdot\frac{x^{q-1}}{x^{\frac{q(p-1)}{p}}}=\frac{q}{p}x^{\frac{q}{p}-1}$$

$$=rx^{r-1}.$$

(証明終)

問.　つぎの関数を微分せよ:

(1)　$x^4-8x^3+3x^2-2.$　　(2)　$(x^2+x+1)^5.$

(3)　$(ax+b)^n$　(a, b は定数, n は自然数).　　(4)　$\sqrt[3]{x^2}.$

(5)　$\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}.$　　(6)　$\sqrt[3]{x^3+1}.$　　(7)　$\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}.$

§6. 3角関数の微分

1. 弧度法　角を表すのに, 直角の $\dfrac{1}{90}$ を 1° (1度) とする **60分法**のほかに, 1つの円をかいて, 半径に等しい長さの弧に対する中心角を, 単位の角1とする角の表し方がある(図6.1). この中心角は, 円の半径 r に関係しない一定の角である. この角を1**ラジアン**, または1**弧度**といい, これを単位とする角の表し方を, **弧度法**という. 微分積分学では, もっぱら, 弧度法が用いられる.

60分法で θ 度である角が, 弧度法の α ラジアンに等しいとすれば, 360° が 2π ラジアン (円周の長さを半径の長さで割ったもの) に対応していることから,

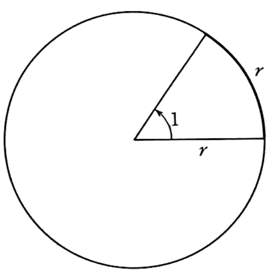


図 6.1

(6.1)　$$\frac{\theta}{\alpha}=\frac{360}{2\pi}.$$

$$\therefore \quad \alpha=\frac{\pi}{180}\theta. \qquad \text{(60 分法と弧度法の関係; 表 6.1)}$$

表 6.1　60 分法と弧度法の関係

$\theta°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

角を弧度法によって表すときは，単位名のラジアンは，ふつう，省略する．

2．一般角の 3 角関数　一般角の 3 角関数の定義を述べておこう．xy-平面上に原点 O を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円をかき，その円周上の 1 点を $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x, y)$ とし，動径 OP が正の実軸方向となす**一般角**を θ (ラジアン; $-\infty<\theta<\infty$) とする．そのとき，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ を，それぞれ，

(6. 2)
$$\sin\theta=\frac{y}{r}, \quad \cos\theta=\frac{x}{r}, \quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

($\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ **の定義式**; 図 6.2)

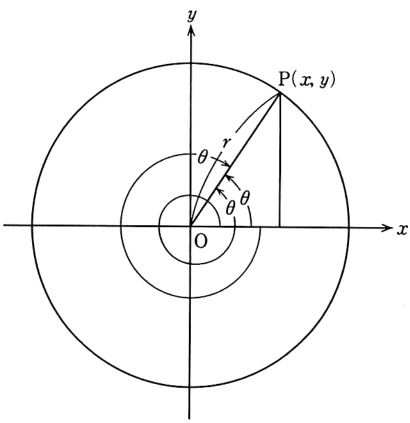


図 6.2

によって定義する．ここで，$\tan\theta$ は，$x\neq 0$ のときにかぎって定義される．定義 (6.2) は，円の半径 r の選び方に無関係で，角 θ によって一意的に定まることがわかる．

定義 (6.2) によって，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の値の符号は，座標軸上の点を除いて，点 $\mathrm{P}(x, y)$ が属する象限(図 6.3)によって定まる(表 6.2)．

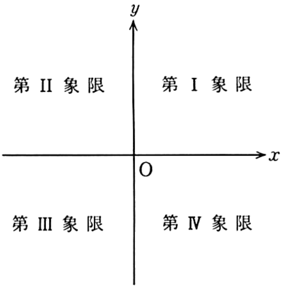


図 6.3

表 6.2

3 角関数 ＼ 象限	I	II	III	IV
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

$\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ は，それぞれ，$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ の逆数によって定義される:

(6.3)　$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{\sin\theta},\quad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},\quad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}.$$
（$\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ **の定義式**）

3.　3 角関数の公式　　微分積分の計算でよく使われる，3 角関数の公式を準備しておこう．まず，

(6.4)　$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

(6.5)　$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$　（**加法定理**）

これらの公式の証明は省略する．

(6.4)式，(6.5)式で，β を $-\beta$ でおきかえると，それぞれ，

(6.6)　$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

(6.7)　$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$　（**減法定理**）

(6.4)式，(6.5)式で，$\beta=\alpha$ とおくと，それぞれ，

(6.8)　$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

(6.9)　$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$
$$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha.$$　（**2 倍角の公式**）

$$\because\quad \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

(6.9)式で，α を $\dfrac{\alpha}{2}$ とおけば，

(6.10)	$\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2},\qquad \cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}.$	**(半角の公式)**

(6.4)式 + (6.6)式, (6.4)式 − (6.6)式, (6.5)式 + (6.7)式, (6.5)式 − (6.7)式をつくって，せいとんすれば，それぞれ，

(6.11)　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\},$

(6.12)　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\},$

(6.13)　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\},$

(6.14)　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}.$

(積を和・差になおす公式)

これら，積を和・差になおす公式で，$\alpha+\beta=A$，$\alpha-\beta=B$ とおけば，

$$\alpha=\frac{A+B}{2},\qquad \beta=\frac{A-B}{2}$$

となるから，それぞれから，つぎの公式がえられる：

(6.15)　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2},$

(6.16)　$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2},$

(6.17)　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2},$

(6.18)　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}.$

(和・差を積になおす公式)

公式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ の両辺を $\cos^2\alpha$，$\sin^2\alpha$ で割れば，それぞれ，

(6.19)　$\tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha,\qquad 1+\cot^2\alpha=\mathrm{cosec}^2\,\alpha.$

4. 不定形の極限値　3角関数の微分の公式をみちびくために，つぎの不定形の極限値の公式を証明しておく：

$$\text{(6.20)}\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

証明　まず,

$$\text{(6.21)}\qquad \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=1$$

を証明する. $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ と仮定してよい.

そのとき, 図 6.4 において, 面積を比較することによって,

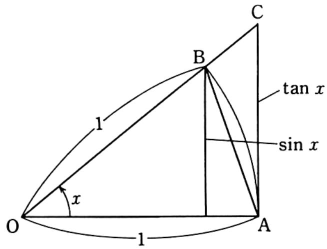


図 6.4

$$\triangle\text{OAB}<\text{扇形 OAB}<\triangle\text{OAC}.$$

$$\therefore\qquad \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x<\frac{x}{2\pi}\cdot\pi<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan x.$$

$$\therefore\qquad \sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}.$$

$$\therefore\qquad \cos x<\frac{\sin x}{x}<1.$$

ここで, x を 0 にかぎりなく近づければ,

$$1=\lim_{x\to +0}\cos x\leqq\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}\leqq 1.$$

したがって, (6.21)式がえられる.

つぎに, $x=-t$ とおけば, $x<0$ のとき $t>0$ であって, $\sin(-t)=-\sin t$ であることに注意すれば, (6.21)式によって,

$$\text{(6.22)}\qquad \lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to +0}\frac{-\sin t}{-t}=1.$$

(6.21)式と(6.22)式によって, (6.20)式がえられる.　　(証明終)

5. 3 角関数の微分

$$\text{(6.23)}\qquad (\sin x)'=\cos x.$$

証明　3 角関数の差を積になおす公式(6.16)によって,

$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\dfrac{h}{2}\right)\sin\dfrac{h}{2}}{h}\qquad(\because\ \text{公式(6.16)})$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=*.$$

ここで，公式(6.20)を用いれば，

$$*=\cos x. \qquad \text{(証明終)}$$

(6.24)	$(\cos x)'=-\sin x.$

証明 3角関数の差を積になおす公式(6.18)によって，

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} \qquad (\because\ \text{公式}(6.18))$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right\}\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=*.$$

ここで，公式(6.20)を用いれば，

$$*=-\sin x. \qquad \text{(証明終)}$$

(6.25)	$(\tan x)'=\sec^2 x.$

証明 商の微分の公式(11ページ)と(6.23)式，(6.24)式を利用すれば，

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos x\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x. \qquad \text{(証明終)}$$

(6.26)	$(\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x.$

証明 $\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ に注意すれば，(6.25)式の証明と同様である．

(証明終)

問 1. つぎの極限値を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}.$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}.$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}.$

問 2. つぎの関数を微分せよ:

(1) $\sin(2x+1)$. (2) $\cos 2x$. (3) $\sin^2 2x$.

(4) $x\cos^2 x$. (5) $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right)$. (6) $\tan(2x+1)$.

(7) $\sec x$. (8) $\sin^2 x-\cos^2 x$. (9) $\frac{\sin x}{1-x}$.

(10) $\tan(x^2+1)$. (11) $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$. (12) $\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$.

(13) $\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x$. (14) $\sqrt{1+\sin x}$. (15) $\frac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

問 3. 定理 4.4 (14 ページ)を利用して, つぎのパラメター表示から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ(a は正の定数):

(1) 円: $x=a\cos t,\ y=a\sin t \quad (0<t<\pi)$.

(2) サイクロイド: $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t) \quad (0<t<2\pi)$.

§7. 指数関数と対数関数の微分

1. 指数関数 は,

$$y=a^x \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

によって定義される. a を**指数関数の底**という.

$a>1$ の場合: $y=a^x$ は増加関数(図 7.1),

$a<1$ の場合: $y=a^x$ は減少関数(図 7.2).

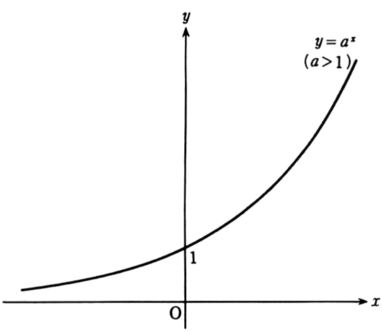


図 7.1

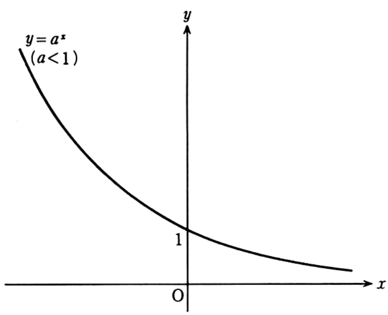


図 7.2

指数関数に対しては，**指数法則**:

(7. 1)	$a^x a^t = a^{x+t}$,		
(7. 2)	$a^{\alpha x} = (a^x)^\alpha$	(α は実数)	**(指数法則)**

がなりたつ.

2. 対 数 関 数:

$$y = \log_a x \qquad (x > 0;\ a > 0,\ a \neq 1)$$

は，指数関数: $y = a^x$ の逆関数として定義される．a を**対数の底**とよぶ.

(7. 3) $$\therefore \quad y = \log_a x. \quad \rightleftarrows \quad x = a^y.$$

$a^0 = 1$，$a^1 = a$ であるから，定義(7.3)によって，

(7. 4) $$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1.$$

定理 7.1 つぎの**対数法則**がなりたつ:

(i) $\log_a xt = \log_a x + \log_a t$;

(ii) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x$;

(iii) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a} \quad (b > 0,\ b \neq 1)$. **(対数法則)**

証明 (i) $\log_a x = y$，$\log_a t = u$，$\log_a xt = z$ とおけば，(7.3)式によって，

$$a^y = x, \qquad a^u = t, \qquad a^z = xt.$$

$$\therefore \quad a^z = xt = a^y a^u = a^{y+u} \qquad (\because \text{ 指数法則 } (7.1)).$$

$$\therefore \quad z = y + u.$$

(ii) $\log_a x = y$，$\log_a x^\alpha = z$ とおけば，(7.3)式によって，

$$a^y = x, \qquad a^z = x^\alpha.$$

$$\therefore \quad a^z = x^\alpha = (a^y)^\alpha = a^{y\alpha} \qquad (\because \text{ 指数法則 } (7.2)).$$

$$\therefore \quad z = \alpha y.$$

(iii) $\log_a x = y$，$\log_b x = z$，$\log_b a = c$ とおけば，(7.3)式によって，

$$a^y = x, \qquad b^z = x, \qquad b^c = a.$$

$$\therefore \quad b^z = x = a^y = (b^c)^y = b^{cy} \qquad (\because \text{ 指数法則 } (7.2)).$$

$$\therefore \quad z = cy. \qquad \therefore \quad y = \frac{z}{c}.$$

(証明終)

3. 自然対数 指数関数および対数関数の微分の公式をみちびくために，いくつかの不定形の極限値の公式を準備しておく．まず，

$$(7.5)\qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2.71828\cdots \qquad (n \text{ は自然数})$$

であることが知られている．この e を**自然対数の底**という．(7.5)式から，

$$(7.6)\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

がなりたつことが示される．

微分積分学では，もっぱら，e を底とする対数 $\log_e x$ が採用され，**自然対数**とよぶ．自然対数では，底 e を省略して $\log x$ と書く．したがって，対数関数：

$$y=\log x$$

は，指数関数 $y=e^x$ の逆関数である(図 7.3)．

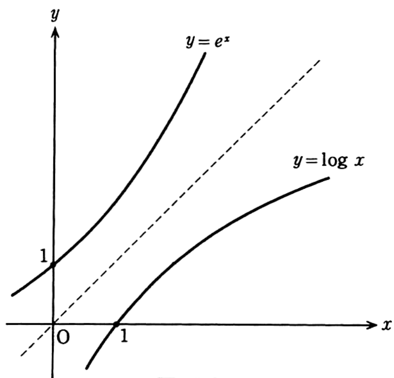


図 7.3

(7.6)式において，$h=\dfrac{1}{x}$ とおいて，$x\to\pm\infty$ のとき $h\to 0$ であることに注意すれば，

$$(7.7)\qquad \lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e.$$

この左辺において，自然対数をとってから極限に移せば，

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log(1+h)=\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}=\log e=1.$$

$$(7.8)\qquad \therefore\quad \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log(1+h)=1.$$

さらに，ここで，$k=\log(1+h)$ とおけば，$h=e^k-1$ と書け，$h\to 0$ のとき $k\to 0$ であることに注意すれば，つぎの極限関係がえられる：

$$(7.9)\qquad \lim_{k\to 0}\frac{e^k-1}{k}=1$$

4．指数関数と対数関数の微分

(7．10) $$(e^x)'=e^x.$$

証明 (7.9)式によって，

$$(e^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x. \qquad \text{(証明終)}$$

(7．11) $$(\log|x|)'=\frac{1}{x} \qquad (x\neq 0).$$

証明 $x>0$ の場合：

$$\begin{aligned}(\log x)'&=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\frac{x+h}{x}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\frac{x}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)=*.\end{aligned}$$

ここで，$h\to 0$ のとき $\dfrac{h}{x}\to 0$ であることに注意すれば，(7.8)式によって，

$$*=\frac{1}{x}.$$

$x<0$ の場合：

$t=-x$ とおけば，$t>0$ であって，合成関数の微分の公式 (12 ページ) と上の結果によって，

$$\begin{aligned}(\log|x|)'&=\{\log(-x)\}'=\frac{d\log t}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}\\ &=\frac{1}{t}\cdot(-1)=\frac{1}{x}.\end{aligned} \qquad \text{(証明終)}$$

5．対数微分の公式

定理 7.2 $f(x)$ が微分可能で，$f(x)\neq 0$ のとき，

(7．12) $$(\log|f(x)|)'=\frac{f'(x)}{f(x)}$$ **(対数微分の公式)**

証明 $u=f(x)$，$y=\log|u|$ とおけば，合成関数の微分の公式によって，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot f'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}. \qquad \text{(証明終)}$$

6．応用例

例 1. $y=\log|\sin x|$.

$$y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$$ （例 1 終）

例 2. $y=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$.

$$y=\frac{1}{2}(\log|x-1|-\log|x+1|)$$

と書けるから，

$$y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^2-1}.$$

(7．13) $$\therefore\quad \left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)'=\frac{1}{x^2-1}.$$

（例 2 終）

例 3. $y=\log|x+\sqrt{x^2+a}|$ （a は定数で，$a\neq 0$）.

$$y'=\frac{(x+\sqrt{x^2+a})'}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+a}}}{x+\sqrt{x^2+a}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}.$$

(7．14) $$\therefore\quad (\log|x+\sqrt{x^2+a}|)'=\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\qquad (a\neq 0).$$

（例 3 終）

問 1. 3 項の結果を利用して，つぎの極限値を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$ $(a\neq 0)$.　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)}{x}$.

問 2. つぎの関数を微分せよ（a は定数）:

(1) e^{2x+1}.　(2) e^{-x^2}.　(3) $\log(2x-5)$.

(4) $\log(x^2+1)$.　(5) xe^{-2x}.　(6) $x^2\log x$.

(7) $x\log(x^2+1)$.　(8) $e^{-x}\log x$.　(9) $e^x\sin x$.

(10) $\dfrac{e^x\cos x}{\sin x}$.　(11) $xe^{\frac{1}{x}}$.　(12) $(e^x+e^{-x})^2$.

(13) $\log\log x$.　(14) $\log|\cos x|$.

(15) $\log|x-\sqrt{x^2+a}|$ $(a\neq 0)$.

(16) $\log\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$ $(a>0)$.　(17) $e^{\sin x}$.

＊**問 3.**　$y=Ae^{kx}$（A, k は定数)のとき,

$$\frac{dy}{dx}-ky=0$$

がなりたつことを証明せよ.

＊**問 4.**　曲線: $y=Ae^{kx}$ (A, k は 0 でない定数) 上の任意の点 P での接線が x-軸と交わる点を T, P から x-軸へひいた垂線を PQ とするとき, 線分 TQ の長さはつねに一定であることを証明せよ (図 7.4).

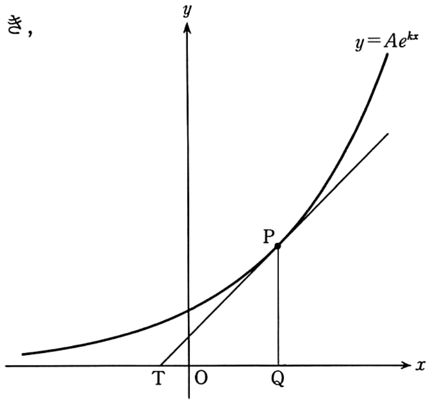


図 7.4

§ 8.　対数微分法

1．対数微分法

(8．1)　　$y=f(x)^{g(x)}$　　$(f(x)>0)$

の導関数を, **対数微分法**によって求める方法を示そう.

(8.1)式の両辺の対数をとれば,

$$\log y=\log f(x)^{g(x)}=g(x)\log f(x).$$

対数微分の公式(26 ページ)を利用して, この両辺を x に関して微分すれば,

$$\frac{y'}{y}=g'(x)\log f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

$$\therefore \qquad y'=f(x)^{g(x)}\left\{g'(x)\log f(x)+g(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right\}$$

$$=f(x)^{g(x)-1}\{f(x)g'(x)\log f(x)+f'(x)g(x)\}.$$

2．応 用 例

例 1.　$y=a^x$　$(a>0)$.

両辺の対数をとって,

$$\log y=\log a^x=x\log a.$$

両辺を x に関して微分して,

$$\frac{y'}{y}=\log a.$$

$$\therefore \qquad y'=y\log a=a^x\log a.$$

(8．2)	$\therefore$	$(a^x)'=a^x \log a.$

（例1終）

例 2. $y=x^x \quad (x>0).$

両辺の対数をとって,

$$\log y=\log x^x=x \log x.$$

両辺を x に関して微分して,

$$\frac{y'}{y}=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1.$$

$$\therefore \quad y'=y(\log x+1)=x^x(\log x+1).$$

(8．3) $\quad\therefore\quad (x^x)'=x^x(\log x+1).$ （例2終）

例 3. $y=x^\alpha \quad (x>0;\ \alpha$ は実数).

両辺の対数をとって,

$$\log y=\log x^\alpha=\alpha \log x.$$

両辺を x に関して微分して,

$$\frac{y'}{y}=\frac{\alpha}{x}.$$

$$\therefore \quad y'=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

(8．4)	$\therefore$	$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(x>0;\ \alpha$ は実数).

（例3終）

例 4. $y=\sqrt{\dfrac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}}.$

この種類の関数は，このまま，微分することもできるが，対数微分法によると比較的簡単である.

両辺の対数をとれば,

$$\log y=\frac{1}{2}\{\log|1-x|+\log|2x^2+5|-3\log|x-2|\}.$$

両辺を x に関して微分して,

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x}+\frac{4x}{2x^2+5}-\frac{3}{x-2}\right)$$

$$\therefore \quad y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(1-x)(2x^2+5)}{(x-2)^3}}\left(-\frac{1}{1-x}+\frac{4x}{2x^2+5}-\frac{3}{x-2}\right).$$ （例4終）

問 1. つぎの関数を微分せよ:

(1) 2^x+3^x. (2) $x^2a^x \quad (a>0)$.

(3) 2^{-x}. (4) $2^{\frac{1}{x}}$. (5) $2^{\log x}$.

(6) $x^{\frac{1}{x}}$. (7) $x^{\sin x}$. ＊(8) $(\sin x)^{\tan x}$.

(9) $(x+1)^{\frac{1}{x}}$. (10) $\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}}$.

問 2. 対数微分法を利用して，$f(x)=(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)$ のとき，

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x+a_1}+\frac{1}{x+a_2}+\frac{1}{x+a_3}$$

であることを証明せよ.

§ 9. 双曲線関数の微分

1. 双曲線関数 指数関数を用いて，つぎの各式によって定義される関数を総称して，**双曲線関数**という:

(9.1) $$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},$$

(9.2) $$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

(9.3) $$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}},$$

(9.4) $$\coth x=\frac{\cosh x}{\sinh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}},$$

(9.5) $$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x},$$

(9.6) $$\operatorname{cosech} x=\frac{1}{\sinh x}.$$ **(双曲線関数の定義式)**

sinh は**ハイパボリックサイン**(hyperbolic sine)または**ハイパーサイン**とよむ. cosh, tanh などについても同様である.

双曲線関数は，3 角関数と類似した性質をもっている. まず，つぎの加法定理がなりたつ:

定理 9.1

(9.7) $$\sinh(\alpha+\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta,$$

(9.8) $$\cosh(\alpha+\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta+\sinh\alpha\sinh\beta.$$ **(加法定理)**

証明
$$\sinh\alpha\cosh\beta+\cosh\alpha\sinh\beta$$
$$=\frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}+\frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}$$
$$=2\left(\frac{e^{\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{\beta}}{2}-\frac{e^{-\alpha}}{2}\cdot\frac{e^{-\beta}}{2}\right)=\frac{e^{\alpha+\beta}-e^{-(\alpha+\beta)}}{2}$$
$$=\sinh(\alpha+\beta).$$

(9.8)式についても，同様である． (証明終)

(9.7)式，(9.8)式で，β を $-\beta$ でおきかえると，それぞれ，

(9．9) $\sinh(\alpha-\beta)=\sinh\alpha\cosh\beta-\cosh\alpha\sinh\beta,$

(9．10) $\cosh(\alpha-\beta)=\cosh\alpha\cosh\beta-\sinh\alpha\sinh\beta.$ **(減法定理)**

最後の式で，$\beta=\alpha$ とおいて，つぎの公式がえられる:

(9．11) $\cosh^2\alpha-\sinh^2\alpha=1.$

上の加法定理，減法定理から，3角関数の2倍角の公式，半角の公式，積を和・差になおす公式，和・差を積になおす公式，と同様な公式がみちびかれる．たとえば，(9.7)式，(9.8)式で，$\beta=\alpha$ とおくと，それぞれ，

(9．12) $\sinh 2\alpha=2\sinh\alpha\cosh\alpha.$

(9．13) $\cosh 2\alpha=\cosh^2\alpha+\sinh^2\alpha$
$=2\cosh^2\alpha-1=1+2\sinh^2\alpha.$

2．双曲線関数の微分

(9．14) $(\sinh x)'=\cosh x.$

証明 $(\sinh x)'=\left(\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\cosh x.$ (証明終)

(9．15) $(\cosh x)'=\sinh x.$

証明 $(\cosh x)'=\left(\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right)'=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}=\sinh x.$ (証明終)

(9．16) $(\tanh x)'=\mathrm{sech}^2\,x.$

証明

$$(\tanh x)'=\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)'$$
$$=\frac{(\sinh x)'\cosh x-\sinh x(\cosh x)'}{\cosh^2 x}$$
$$=\frac{\cosh^2 x-\sinh^2 x}{\cosh^2 x}$$
$$=\frac{1}{\cosh^2 x} \qquad (\because \quad (9.11)式)$$
$$=\mathrm{sech}^2\, x.$$

(証明終)

(9. 17)	$(\coth x)'=-\mathrm{cosech}^2\, x.$

証明 $\coth x=\dfrac{\cosh x}{\sinh x}$ に注意すれば，(9.16)式の証明と同様である.

(証明終)

問 1. つぎの極限値を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x}$. (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{\sin x}$.

問 2. つぎの関数を微分せよ:

(1) $\mathrm{sech}\, x$. (2) $\mathrm{cosech}\, x$. *(3) $\coth x$.

問 3. $y=\cosh ax$ $(a\neq 0)$ は,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=a^2(y^2-1)$$

をみたすことを証明せよ.

***問 4.** $x=a\cosh t,\ y=b\sinh t$ $(a>0,\ b>0)$ について,

(1) これは，双曲線: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の $x>0$ にある部分のパラメター表示であることを示せ.

(2) 定理 4.4 (14 ページ)を利用して，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ.

§ 10. 逆 3 角関数の微分

1. $y=\sin^{-1}x$ $y=\sin x$ **の逆関数**は**無限多価**(無限に多くの値をとる点が存在)であるが，その値域を**主値**: $-\dfrac{\pi}{2}\leqq y\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に制限したものを $y=\sin^{-1}x$ または $y=\arcsin x$ で表し，**アークサイン**とよむ(図 10.1);

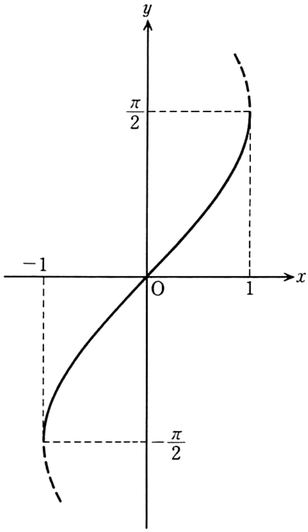


図 10.1　$y=\sin^{-1}x$ のグラフ

すなわち,

$$y=\sin^{-1}x. \quad \Longleftrightarrow \quad x=\sin y \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}\right). \quad (\sin^{-1}x\ \text{の定義})$$

$$(10.1) \qquad (\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1).$$

証明　逆関数の微分の公式 (13 ページ) によって,

$$\frac{d\sin^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\sin y}{dy}}=\frac{1}{\cos y}=*.$$

ここで, $y=\sin^{-1}x$ は主値: $-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$ をとるから, この範囲で $\cos y\geqq 0$ であることに注意すれば,

$$*=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1). \qquad \text{(証明終)}$$

2. $y=\cos^{-1}x$　　$y=\cos x$ **の逆関数**は無限多価であるが, その値域を主値: $0\leqq y\leqq\pi$ に制限したものを $y=\cos^{-1}x$ または $y=\arccos x$ で表し, **アークコサイン**とよむ(図 10.2);

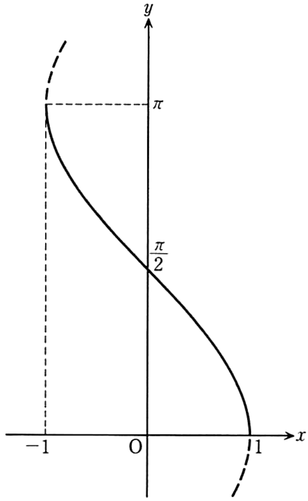


図 10.2　$y=\cos^{-1}x$ のグラフ

すなわち,

$$y=\cos^{-1}x. \quad \Longleftrightarrow \quad x=\cos y \quad (0\leqq y\leqq \pi). \qquad (\cos^{-1}x \text{ の定義})$$

$$(10.2) \qquad (\cos^{-1}x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1).$$

証明　$\cos^{-1}x$ の定義に注意すれば，(10.1)式の証明と同様である．(証明終)

3． $y=\tan^{-1}x$　　$y=\tan x$ の逆関数で値域を主値：$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$ に制限したものを $y=\tan^{-1}x$ または $y=\arctan x$ で表し，**アークタンゼント**とよむ(図 10.3)；

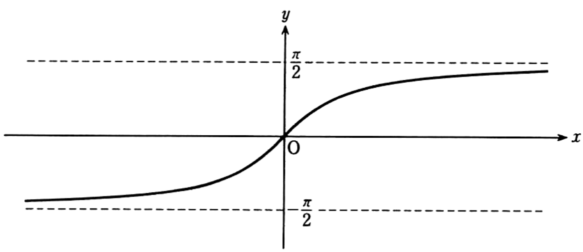


図 10.3　$y=\tan^{-1}x$ のグラフ

すなわち,

$$y=\tan^{-1}x. \iff x=\tan y \quad \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right). \quad (\tan^{-1}x\ \text{の定義})$$

$$(10.3) \qquad (\tan^{-1}x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

証明 逆関数の微分の公式によって,

$$\frac{d\tan^{-1}x}{dx}=\frac{1}{\dfrac{d\tan y}{dy}}=\frac{1}{\sec^2 y}$$
$$=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

(証明終)

4. $y=\cot^{-1}x$ $y=\cot x$ の逆関数で値域を主値: $0<y<\pi$ に制限したものを $y=\cot^{-1}x$ または $y=\mathrm{arccot}\,x$ で表し, **アークコタンゼント**とよむ(図10.4);

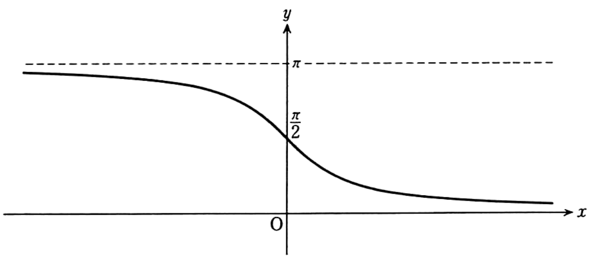


図 10.4 $y=\cot^{-1}x$ のグラフ

すなわち,

$$y=\cot^{-1}x. \iff x=\cot y \quad (0<y<\pi). \quad (\cot^{-1}x\ \text{の定義})$$

$$(10.4) \qquad (\cot^{-1}x)'=-\frac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<\infty).$$

証明 $\cot^{-1}x$ の定義に注意すれば, (10.3)式の証明と同様である.

(証明終)

＊問 1. つぎの極限値を求めよ:

（1） $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^{-1}x}{x}$.　　（2） $\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$.

問 2. つぎの関数を微分せよ:

（1） $\sin^{-1}\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.　　（2） $\cos^{-1}\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.

（3） $\tan^{-1}\dfrac{x}{a}$.　　＊（4） $\cot^{-1}x$.　　（5） $x\tan^{-1}x$.

（6） $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}$　　（7） $\sin^{-1}(x-1)+\cos^{-1}2x$.

（8） $(\sin^{-1}x)^2$.　　（9） $\sin^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

(10) $\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.　　(11) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

(12) $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.　　＊(13) $\dfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ $(a>0)$.

(14) $\cos^{-1}(m\cos x)$ （m は自然数).　　(15) $e^{\tan^{-1}x}$.

(16) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x$.

3

高階導関数

§11. 高階導関数

1. 高階導関数　関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が微分可能であるとき，$f'(x)$ の導関数を $f''(x)$ で表して，$f(x)$ の **2 階導関数**という；すなわち，

$$f''(x)=\{f'(x)\}'.$$

2 階導関数を表す記号としては，$f''(x)$ のほかに，

$$y'',\quad \frac{d^2y}{dx^2},\quad \{f(x)\}'',\quad \frac{d^2f(x)}{dx^2},\quad \frac{d^2}{dx^2}f(x),\quad D^2f(x)$$

などが用いられる．

帰納的に，$(n-1)$ 階導関数：$f^{(n-1)}(x)$ $(n=1,2,\cdots;\ f^{(0)}(x)=f(x))$ が微分可能であるとき；すなわち，$f(x)$ が n **回微分可能**であるとき，$f^{(n-1)}(x)$ の導関数を $f^{(n)}(x)$ で表して，$f(x)$ の n **階**（または n **次**）**導関数**という；すなわち，

$$f^{(n)}(x)=\{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n=1,2,\cdots).$$

n 階導関数を表す記号としては，$f^{(n)}(x)$ のほかに，

$$y^{(n)},\quad \frac{d^ny}{dx^n},\quad \{f(x)\}^{(n)},\quad \frac{d^nf(x)}{dx^n},\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x),\quad D^nf(x)$$

などが用いられる．一般に，2 階以上の導関数を総称して，**高階**（または**高次**）**導関数**という．

2. べきの高階導関数

m を自然数とするとき，

(11.1)
$$(x^m)^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} & (n\leqq m), \\ 0 & (n>m). \end{cases}$$

証明

$$(x^m)'=mx^{m-1},$$
$$(x^m)''=m(m-1)x^{m-2},$$
$$(x^m)'''=m(m-1)(m-2)x^{m-3},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x^m)^{(n)}=m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n} \qquad (n\leqq m),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(x^m)^{(m)}=m!.$$
$$\therefore \quad (x^m)^{(n)}=0 \qquad (n>m).$$
(証明終)

3．2項定理

(11．2)　$$(1+x)^n=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

の係数: $a_0, \cdots, a_n$ を決定しよう．

まず，(11.2)式の両辺において，$x=0$ とおけば，

(11．3)　$$a_0=1.$$

$f(x)=(1+x)^n$ とおけば，公式(11.1)によって，

$$f^{(k)}(x)=n(n-1)\cdots(n-k+1)(1+x)^{n-k} \qquad (k=1, \cdots, n).$$

(11．4)　$$\therefore \quad f^{(k)}(0)=n(n-1)\cdots(n-k+1) \qquad (k=1, \cdots, n).$$

一方，(11.2)式の右辺を k 回微分すれば，公式(11.1)によって，

$$f^{(k)}(x)=k!a_k+(k+1)k\cdots 2a_{k+1}x+\cdots$$
$$+n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}.$$

(11．5)　$$\therefore \quad f^{(k)}(0)=k!a_k \qquad (k=1, \cdots, n).$$

(12.4)式と(12.5)式によって，

$$a_k=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\equiv\binom{n}{k}={}_n\mathrm{C}_k \qquad (k=1, \cdots, n).$$

したがって，

$$\binom{n}{0}\equiv 1$$

と約束すれば，

(11．6)　$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{k}x^k+\cdots+\binom{n}{n}x^n.$$

この式に $x=\dfrac{b}{a}$ を代入し，両辺に a^n をかければ，

(11.7) $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\cdots+\binom{n}{n}b^n.$

(2 項定理)

4. 初等関数の高階導関数

α が実数であって，$\alpha \neq 0, \cdots, n-1$ のとき，

(11.8) $(x^\alpha)^{(n)}=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $(x>0;\ n=1, 2, \cdots).$

証明 公式(8.4)(29 ページ)を利用すれば，(11.1)式の証明と同様である．

(証明終)

(11.9) $$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

証明 $(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right),$

$$(\sin x)''=\left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'''=\left\{\sin\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)\right\}'=\cos\left(x+\frac{2\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right).$$

以下同様にして(厳密には，帰納法によって)，一般な結果がえられる．

(証明終)

(11.10) $$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

証明 (11.9)式の証明と同様である． (証明終)

(11.11) $$(e^x)^{(n)}=e^x \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

証明
$$(e^x)'=e^x,$$
$$\therefore \quad (e^x)''=(e^x)'=e^x.$$

以下同様にして，一般な結果がえられる． (証明終)

(11.12) $$(\log|x|)^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n} \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

証明
$$(\log|x|)'=\frac{1}{x}=x^{-1}.$$

したがって，$a=-1$，n を $n-1$ とおいて，(11.8)式を利用すれば，

$$(\log|x|)^{(n)}=(x^{-1})^{(n-1)}=(-1)(-2)\cdots\{-(n-1)\}x^{-n}$$
$$=(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}.$$ （証明終）

問 1. つぎの関数の 2 階までの導関数を求めよ：

（1） $4x^3-6x^2+2x-4$.　（2） $(x-1)^2(x+1)^3$.

（3） $\dfrac{1}{x^2}$.　（4） $\sqrt{1+x}$.　（5） $\sqrt{a^2-x^2}$ （a は定数）.

（6） $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.　（7） $(2x+1)^{\frac{1}{n}}$ （n は自然数）.

（8） e^{-3x}.　（9） $\sin 2x$.　（10） $\tan x$.　（11） $\log(2x-1)$.

問 2. つぎの関数の 3 階までの導関数を求めよ：

（1） x^4-2x^3+5x.　（2） $-\dfrac{2}{x^3}$.

（3） $\sec x$.　（4） $\tan^{-1}x$.　（5） $\sin^{-1}x$.

問 3. つぎの関数の n 階導関数を求めよ：

（1） $2x^3-9x^2+12x-3$.　（2） $(2x+1)^m$ （m は自然数）.

（3） $(3x+2)^r$ （r は有理数で，$r\neq 0, 1, 2, \cdots$）.

（4） $\dfrac{1}{x+a}$ （a は定数）.　*（5） $\dfrac{1}{(x+2)(x-1)}$.

（6） $e^{-(3x+1)}$.　（7） $\cos(2x+3)$.　*（8） $\sin 3x\cos 2x$.

（9） a^x （$a>0$，$a\neq 1$）.　（10） $\log(2x+1)$.

***問 4.** $y=a\cos\omega x+b\sin\omega x$ （a, b, ω は定数）は，微分方程式：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$$

をみたすことを証明せよ．

問 5. $y=e^{-x}\sin x$ は，つぎの微分方程式をみたすことを証明せよ：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

***問 6.** $y=f(u)$，$u=g(x)$ が，それぞれ 2 階導関数をもつとき，合成関数 $y=f(g(x))$ に対して，つぎの公式がなりたつことを証明せよ：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{dy}{du}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}.$$ **（合成関数の 2 次微分の公式）**

＊問 7. 単調で 2 回微分可能な関数 $x=f(y)$ の逆関数 $y=f^{-1}(x)$ に対して，つぎの公式がなりたつことを証明せよ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{d^2x}{dy^2}}{\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3}.$$

(逆関数の 2 次微分の公式)

＊問 8. $x=x(t)$, $y=y(t)$ が 2 回微分可能であって，$\dot{x}(t)\neq 0$ であるとき，つぎの公式がなりたつことを証明せよ:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3};$$

(パラメター表示された関数の 2 次微分の公式)

ここで，$\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x}=\dfrac{d^2x}{dt^2}$, など.

問 9. 前問の結果を利用して，つぎの関数のパラメター表示から，$\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ(a, b は正の定数):

(1) $\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t. \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t), \\ y=a(\sin t-t\cos t). \end{cases}$

§12. ライプニッツの公式

1. ライプニッツの公式 $u=f(x)$, $v=g(x)$ は，ともに，n 回微分可能であると仮定する．積の微分の公式(11 ページ)によって，

(12.1) $$(uv)'=u'v+uv'.$$

積の微分の公式を利用して，さらに，この両辺を微分すれば，

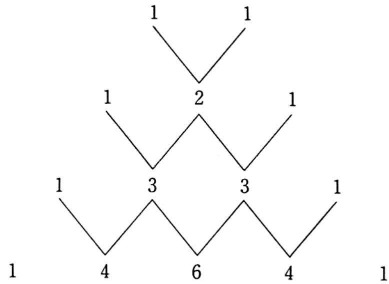
(12.2) $$\begin{cases} (uv)''=(u''v+u'v')+(u'v'+uv'') \\ \qquad\;\; =u''v+2u'v'+uv''. \end{cases}$$

以下，同様にして，

(12.3) $$\begin{cases} (uv)'''=(u'''v+u''v')+2(u''v'+u'v'')+(u'v''+uv''') \\ \qquad\;\;\; =u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''. \end{cases}$$

(12.4) $$\begin{cases} (uv)^{(4)}=(u^{(4)}v+u'''v')+3(u'''v'+u''v'') \\ \qquad\qquad +3(u''v''+u'v''')+(u'v'''+uv^{(4)}) \\ \qquad\quad =u^{(4)}v+4u'''v'+6u''v''+4u'v'''+uv^{(4)}. \end{cases}$$

$(uv)'$, $(uv)''$, $(uv)'''$, $(uv)^{(4)}$ における係数の関係は,



であって, (12.1)式, (12.2)式, (12.3)式, (12.4)式の右辺の係数は, それぞれ, 2項定理における $(u+v)^1$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, $(u+v)^4$ の展開係数と同じ法則によって定まる. 微分の次数が増加しても同様である.

したがって, つぎの定理がえられる(厳密な証明は帰納法によればよい):

定理 12.1　$u=f(x)$, $v=g(x)$ が, ともに, n 回微分可能ならば,

$$(12.5)\quad \begin{cases} (uv)^{(n)}=\binom{n}{0}u^{(n)}v+\binom{n}{1}u^{(n-1)}v'+\binom{n}{2}u^{(n-2)}v''+\cdots \\ \qquad +\binom{n}{n-1}u'v^{(n-1)}+\binom{n}{n}uv^{(n)} \qquad (n=1, 2, \cdots). \end{cases}$$

（ライプニッツの公式）

2. 応用例

例 1.　$u=f(x)$, $v=x^2$.

$$v'=2x, \qquad v''=2, \qquad v'''=v^{(4)}=\cdots=0$$

に注意すれば,

$$\begin{aligned}\{x^2f(x)\}^{(n)}&=\binom{n}{0}x^2f^{(n)}(x)+\binom{n}{1}(x^2)'f^{(n-1)}(x)+\binom{n}{2}(x^2)''f^{(n-2)}(x)\\ &=x^2f^{(n)}(x)+2nx\,f^{(n-1)}(x)+n(n-1)f^{(n-2)}(x) \qquad (n\geqq 2).\end{aligned}$$

(例1終)

例 2.　$y=\tan^{-1}x$.

$$y'=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(12.6)\qquad \therefore \quad (1+x^2)y'=1.$$

この左辺において，$u=f(x)=y'$，$v=g(x)=1+x^2$ とおいて，

$$v'=2x, \quad v''=2, \quad v'''=v^{(4)}=\cdots=0$$

に注意して，ライプニッツの公式を利用すれば，

$$\binom{n}{0}y^{(n+1)}\cdot(1+x^2)+\binom{n}{1}y^{(n)}\cdot 2x+\binom{n}{2}y^{(n-1)}\cdot 2$$
$$=(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0 \qquad (n\geqq 2).$$

最後の等式は，$n=1$ の場合にもなりたつ；すなわち，最後の等式で，$n=1$ とおけば，

$$(1+x^2)y''+2xy'=0.$$

これは，(12.6)式の両辺を微分したものにほかならない．したがって $y=\tan^{-1}x$ に対して，**漸化式**:

(12.7) $$(1+x^2)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0 \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

がなりたつ．

さて，(12.7)式に $x=0$ を代入すれば，

(12.8) $$y^{(n+1)}(0)+n(n-1)y^{(n-1)}(0)=0 \qquad (n=1, 2, \cdots).$$

$$y^{(0)}(0)=\tan^{-1}0=0, \quad y^{(1)}(0)=\frac{1}{1+0^2}=1$$

に注意すれば，(12.8)式から，順次に，

$$y^{(0)}(0)=y^{(2)}(0)=y^{(4)}(0)=\cdots=0,$$
$$y^{(1)}(0)=1, \quad y^{(3)}(0)=(-1)2!, \quad y^{(5)}(0)=(-1)^2 4!, \cdots$$

がえられる． (例 2 終)

問 1. ライプニッツの公式を用いて，つぎの高階導関数を求めよ:

(1) $(e^x \sin x)^{(5)}$. (2) $(e^{-x}\cos x)^{(4)}$.

(3) $(x^2 e^x)^{(6)}$. (4) $(x\cos x)^{(7)}$.

問 2. ライプニッツの公式を用いて，つぎの関数の n 階導関数を求めよ:

(1) $x^2 e^x$. (2) $x\sin x$. *(3) $x^2\sin x$.

問 3. ライプニッツの公式を用いて，つぎの公式がなりたつことを証明せよ:

$$\frac{d^n}{dx^n}(x\log x)=(-1)^n\frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \qquad (n\geqq 2).$$

問 4. 例 2 にならって，$y=\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$ に対して，つぎの漸化式がなりたつことを証明せよ:

$$(x^2-1)y^{(n+1)}+2nxy^{(n)}+n(n-1)y^{(n-1)}=0 \qquad (n\geqq 1).$$

4

平均値の定理

§ 13. ロールの定理

1. ロールの定理

定理 13.1 $f(x)$ は $[a, b]$ で連続, (a, b) で微分可能で,

(13. 1) $$f(a)=f(b)=0$$

ならば,

(13. 2) $$f'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する(図 13.1). **(ロールの定理)**

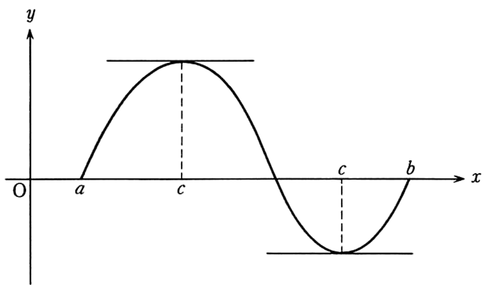


図 13.1

証明 $f(x)$ の値が正になるところがあれば, $f(x)$ が最大となる c $(a<c<b)$ が存在する. $f'(c)=0$ となることを示そう. $f(c)$ は最大値であることに注意すれば,

$$f(c+h)-f(c)\leqq 0 \qquad (h>0;\ 図 13.2).$$

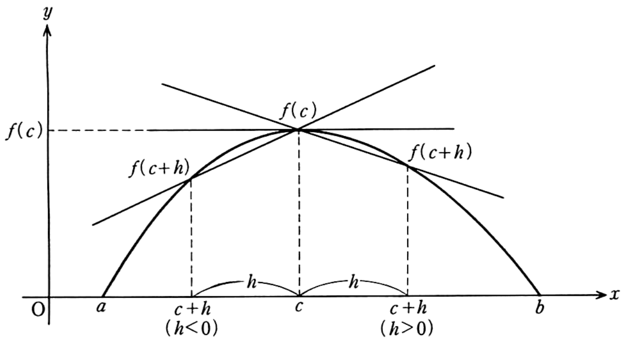


図 13.2

(13.3) $$\therefore \quad f'_+(c) \equiv \lim_{h \to +0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \leqq 0.$$

また,

$$f(c+h)-f(c) \leqq 0 \qquad (h<0;\ 図\ 13.2).$$

(13.4) $$\therefore \quad f'_-(c) \equiv \lim_{h \to -0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqq 0.$$

$f(x)$ は $x=c$ で微分可能であるから,

(13.5) $$f'(c)=f'_+(c)=f'_-(c).$$

(13.3)式, (13.4)式, (13.5)式によって,

$$f'(c)=0.$$

$f(x)$ の値が負になるところがあれば, $f(x)$ が最小となる $c\ (a<c<b)$ が存在し, 上の場合と同様にして, $f'(c)=0$ が示される(図 13.3).

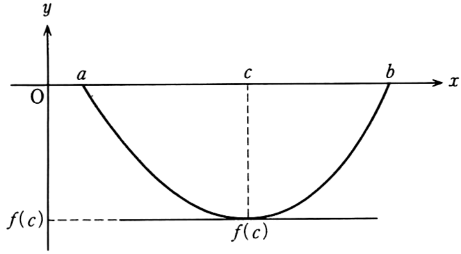


図 13.3

$f(x)$ が正にも負にもならないならば, $f(x)\equiv 0$. そのとき, $f'(x)\equiv 0$. この場合は, 明らかに定理はなりたつ. (証明終)

問 1.　ロールの定理で，条件式(13.1)のかわりに

$$f(a)=f(b)$$

としても，(13.2)式をみたす c が存在することを証明せよ．

問 2.　つぎの関数について，ロールの定理をみたす c を求めよ：

（1）　$(x-a)(b-x)$.　　（2）　$(x-a)(b-x)^2$.

（3）　$(x-a)\sqrt{b-x}$.

§14. 平均値の定理

1. 平均値の定理

定理 14.1　$f(x)$ が $[a, b]$ で連続で，(a, b) で微分可能ならば，

(14.1)　$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する(図 14.1).　**(平均値の定理)**

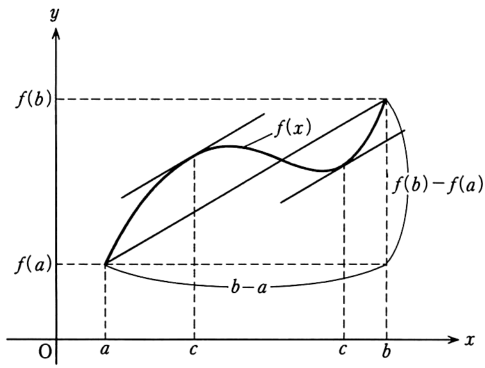


図 14.1

証明　2点 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ を通る直線は，

$$y=m(x-a)+f(a) \qquad \left(m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right).$$

$f(x)$ とこの式との差を

(14.2)　$$F(x)\equiv f(x)-\{m(x-a)+f(a)\}$$

とおくとき，

$$F(a)=F(b)=0$$

となり，$F(x)$ はロールの定理の仮定をみたす(図 14.2).

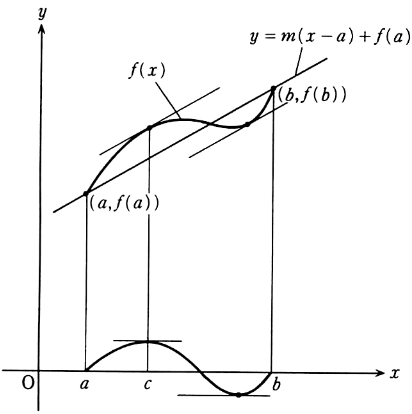


図 14.2

したがって，ロールの定理によって，

$$F'(c)=0 \qquad (a<c<b) \tag{14.3}$$

をみたす c が存在する．(14.2)式によって，

$$F'(x)=f'(x)-m \tag{14.4}$$

であるから，(14.3)式と(14.4)式によって，

$$0=F'(c)=f'(c)-m=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (a<c<b). \qquad \text{(証明終)}$$

2．平均値の定理の変形　さて，(14.1)式は，a と b の役割をとりかえることによって，$a>b$ のときも，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a>c>b) \tag{14.5}$$

の形でなりたつことがわかる．

したがって，平均値の定理は，

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(c) \qquad (a\leqslant c\leqslant b) \quad \textbf{(平均値の定理)} \tag{14.6}$$

の形に書くことができる．ここで，

$$\theta=\frac{c-a}{b-a}$$

とおけば，a と b の大小関係にかかわらず，

$$0<\theta<1$$

であって，(14.6)式は，

(14.7) $$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a+\theta(b-a)) \qquad (0<\theta<1)$$

と書ける．ここで，さらに，$b=a+h$ とおけば，

(14.8) $$f(a+h)=f(a)+f'(a+\theta h)h \qquad (0<\theta<1)$$

(平均値の定理)

と書ける；ここで，h は正，負，いずれでもよいことに注意．

3. 平均値の定理の応用

定理 14.2 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続で，(a, b) で

$$f'(x)\equiv 0$$

ならば，

$$f(x)\equiv c \qquad (c\text{ は定数})$$

である．

証明 平均値の定理によって，任意の $x\in[a, b]$ に対して，

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(\xi) \qquad (a<\xi<x)$$

をみたす ξ が存在する．定理の仮定によって，$f'(\xi)=0$ であるから，

$$f(x)=f(a).$$

x は任意であったから，

$$f(x)\equiv f(a).$$

(証明終)

4. コーシーの平均値の定理

定理 14.3 $f(x)$，$g(x)$ が $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能で，$g'(x)\neq 0$ ならば，

(14.9) $$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する． **(コーシーの平均値の定理)**

証明

(14.10) $$F(x)\equiv\{g(b)-g(a)\}\{f(x)-f(a)\}-\{f(b)-f(a)\}\{g(x)-g(a)\}$$

とおけば，

$$F(a)=F(b)=0$$

となり，$F(x)$ は，ロールの定理の仮定をみたす．

したがって，ロールの定理によって，

(14．11)　$F'(c)=0 \qquad (a<c<b)$

をみたす c が存在する．(14.10)式によって，

(14．12)　$F'(x)=\{g(b)-g(a)\}f'(x)-\{f(b)-f(a)\}g'(x)$

であるから，(14.11)式と(14.12)式によって，

(14．13)　$0=F'(c)=\{g(b)-g(a)\}f'(c)-\{f(b)-f(a)\}g'(c)$

$(a<c<b).$

定理の仮定: $g'(x)\neq 0$ $(a<x<b)$ から，平均値の定理によって，$g(b)-g(a)\neq 0$. そのとき，(14.13)式から(14.9)式がえられる．　(証明終)

問 1. つぎの $f(x)$ について，平均値の定理の(14.1)式にあてはまる c を求めよ．また，(14.7)式にあてはまる θ を求めよ:

(1) $f(x)=x^2$.　　(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(0<a<b)$.

(3) $f(x)=\sqrt{x}$ $(0<a<b)$.

***問 2.** $f(x)$, $g(x)$ が $[a, b]$ で連続で，(a, b) で $f'(x)\equiv g'(x)$ ならば，

$f(x)\equiv g(x)+c \qquad$ (c は定数)

であることを証明せよ．

問 3. 定理 14.2 を利用して，つぎの (1), (2), (3) を証明せよ:

(1) $f'(x)=a$ (一定) ならば，$f(x)=ax+c$ (c は定数) である．

(2) $f'(x)=ax+b$ (a, b は定数) ならば，$f(x)=\dfrac{a}{2}x^2+bx+c$ (c は定数) である．

(3) $f'(x)=x-\sin x$ ならば，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\cos x+c$ (c は定数)である．

問 4. 問 2 を利用して，つぎの等式を証明せよ:

*(1) $\sin^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\tan^{-1}x$.

(2) $\tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\sin^{-1}x$.

§15. 不定形の極限値

1. ロピタルの定理

定理 15.1 $f(x)$, $g(x)$ は，a をふくむ区間で連続，高々 a を除いて微分可能で，$g'(x)\neq 0$ であって，

$$f(a)=g(a)=0$$

ならば，有限な極限値：$\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するかぎり，

(15.1)
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \text{（ロピタルの定理）}$$

証明 定理の仮定とコーシーの平均値の定理によって，

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \qquad (a<\xi<x)$$

をみたす ξ が存在する．ここで，$x\to a+0$ とすれば，$\xi\to a+0$ であって，

(15.2)
$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (a<\xi<x).$$

同様に，$[x, a]$ でコーシーの平均値の定理を利用すれば，

(15.3)
$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a-0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(15.2)式と(15.3)式によって，(15.1)式がえられる． （証明終）

定理の証明からわかるように，定理は，(15.2)式または(15.3)式の形の片側極限値に関してもなりたつ．

定理 15.2 $f(x)$, $g(x)$ は，十分大きいすべての x について微分可能で，$g'(x)\neq 0$ であって，

$$f(x)\to 0, \qquad g(x)\to 0 \qquad (x\to\infty)$$

ならば，有限な極限値：$\lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するかぎり，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad \text{（ロピタルの定理）}$$

証明 $t=\dfrac{1}{x}$ とおけば，定理 15.1 によって，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to+0}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to+0}\frac{\frac{df(1/t)}{dt}}{\frac{dg(1/t)}{dt}} \qquad (\because\ 定理 15.1)$$

$$=\lim_{t\to+0}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (証明終)$$

定理 15.1, 定理 15.2 と同様な，つぎの定理もなりたつが，証明は省略する:

> **定理 15.3** $f(x)$, $g(x)$ は a をふくむ区間で，a を除いて微分可能で，$g'(x)\neq 0$ であって，
>
> $$f(x)\to\infty, \qquad g(x)\to\infty \qquad (x\to a)$$
>
> ならば，有限な極限値: $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するかぎり，
>
> $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (\text{ロピタルの定理})$$

> **定理 15.4** $f(x)$, $g(x)$ は，十分大きいすべての x について微分可能で，$g'(x)\neq 0$ であって，
>
> $$f(x)\to\infty, \qquad g(x)\to\infty \qquad (x\to\infty)$$
>
> ならば，有限な極限値: $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するかぎり，
>
> $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (\text{ロピタルの定理})$$

2. 応 用 例

例 1. 定理 15.1 によって，

$$\lim_{x\to1}\frac{x^n-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x^n-1)'}{(x-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{nx^{n-1}}{1}=n \qquad (n\ は自然数).$$

(例 1 終)

例 2. 定理 15.1 によって，

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}. \qquad (例 2 終)$$

例 3. 定理 15.1 によって，

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin^{-1}x)'}{(x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1}=1. \qquad (例 3 終)$$

例 4.　定理 15.3 によって，

$$\lim_{x\to0} x\log|x| = \lim_{x\to0}\frac{\log|x|}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\frac{(\log|x|)'}{\left(\dfrac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to0}(-x) = 0. \qquad \text{（例 4 終）}$$

例 5.　任意の実数 $\alpha>0$ に対して，$n-1<\alpha\leqq n$ となる自然数 n がえらべる．したがって，定理 15.3 を n 回くりかえし用いれば，

$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-ax} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^{ax}} = \lim_{x\to\infty}\frac{(x^\alpha)'}{(e^{ax})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha x^{\alpha-1})'}{(ae^{ax})'}$$

$$= \cdots = \lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{a^n x^{n-\alpha} e^{ax}} = 0 \qquad (\alpha>0,\ a>0).$$

$\alpha\leqq0$ のときは，明らかに，$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-ax}=0$ $(a>0)$ がなりたつから，結局，α の値に関係なく，つぎの関係式がなりたつ：

(15.4)
$$\lim_{x\to\infty} x^\alpha e^{-ax} = 0 \qquad (a>0). \qquad \text{（例 5 終）}$$

例 6.　$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

$y=(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$ とおけば，$\log y = \log(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{x^2}\log\cos x$.

定理 15.1 によって，

$$\lim_{x\to0}\log y = \lim_{x\to0}\frac{\log\cos x}{x^2} = \lim_{x\to0}\frac{(\log\cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to0}\frac{\dfrac{-\sin x}{\cos x}}{2x}$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x} = -\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \qquad \text{（例 6 終）}$$

問.　つぎの不定形の極限値を求めよ：

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$.　　（2）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$.

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.　　（4）　$\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$.

（5）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}$.　　（6）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+e^x)}{x}$.

（7）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\cosh x-1}{1-\cos x}$.　　（8）　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}$.

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$.

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)^2-2x+x^2}{x^3}$.

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\log(1+x)}\right)$.

(14) $\displaystyle\lim_{x\to +0}x^x$.

(15) $\displaystyle\lim_{x\to 0}|\tan x|^{\sin x}$.

5

テイラーの定理

§16. テイラーの定理

1. 多項式のテイラー展開　一般の n 次の多項式は，つねに，

(16.1)　$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\cdots+a_n(x-a)^n$

の形に書くことができる．ここで，係数: $a_0, \cdots, a_n$ と $f(x)$ の a における各階数の微分係数との関係について調べてみよう．

多項式 (16.1) の両辺を，順次，n 回まで微分すれば，

(16.2)　$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\cdots+na_n(x-a)^{n-1}$,

(16.3)　$f''(x)=2!\,a_2+3\cdot 2a_3(x-a)+\cdots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}$,

(16.4)　$f'''(x)=3!\,a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3}$,

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

(16.5)　$f^{(n)}(x)=n!\,a_n$.

(16.1)式〜(16.5)式の各式の両辺で，$x=a$ とおけば，

$$f(a)=a_0,\quad f'(a)=a_1,\quad f''(a)=2!\,a_2,\quad f'''(a)=3!\,a_3,$$
$$\cdots\cdots,\ f^{(n)}(a)=n!\,a_n.$$

したがって，n 次の多項式 $f(x)$ のつぎの表示がえられる:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

この表示の仕方を，一般の関数 $f(x)$ にまで広めたものが，これから述べるテイラーの定理ないしはテイラー展開である．

2. テイラーの定理

定理 16.1 $f(x)$ は，$[a,b]$ で $(n-1)$ 階導関数が連続で，(a,b) で n 回微分可能ならば，

(16.6) $$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n \quad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する． **（テイラーの定理）**

証明 一般の場合も同様であるので，$n=2$ の場合について証明する．

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\frac{\mu}{2}(b-a)^2$$

をみたす μ が，

$$\mu=f''(c) \qquad (a<c<b)$$

と書けることを示せばよい．

$$F(x)\equiv f(b)-\left\{f(x)+f'(x)(b-x)+\frac{\mu}{2}(b-x)^2\right\}$$

とおけば，

$$F(a)=F(b)=0.$$

したがって，$F(x)$ はロールの定理（44 ページ）の仮定をみたしている．そのとき，ロールの定理によって，

(16.7) $$F'(c)=0 \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する．

$$F'(x)=-[f'(x)+\{-f'(x)+f''(x)(b-x)\}-\mu(b-x)]$$
$$=\{\mu-f''(x)\}(b-x)$$

であるから，(16.7)式によって，

(16.8) $$\mu=f''(c) \qquad (a<c<b).$$ （証明終）

$b<a$ と仮定しても，証明はまったく同様であるから，テイラーの定理は，$b<a$ の場合にもなりたつことがわかる．

定理 16.1 において，平均値の定理の場合（47 ページ）と同様に，

$$b=a+h, \quad \frac{c-a}{b-a}=\theta$$

とおけば，$0<\theta<1$ であって，(16.6)式は，

$$(16.9) \quad f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}+\frac{f^{(n)}(a+\theta h)}{n!}h^n \quad (0<\theta<1)$$

と書ける.

さらに, (16.9)式において, $a=0$, $h=x$ とおけば,

$$(16.10) \quad f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n \quad (0<\theta<1)$$

と書ける. (16.10)式の形の公式は, **マクローリンの定理**ともよばれる.

問 1. (16.9)式における, $n=2$ の場合の式:

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a+\theta h)h^2$$

において, $f(x)=x^3$ であるとき, θ の値を求めよ.

問 2. $|x|<R$ で連続な n 階導関数をもつ $f(x)$ に対して,

$$|f^{(n)}(x)|\leqq M$$

がなりたつならば, $|x|<R$ で $f(x)$ を,

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}$$

で近似したときの誤差の絶対値は, $\dfrac{MR^n}{n!}$ をこえないことを証明せよ.

§ 17. 初等関数への応用

1. $f(x)=e^x$.

(11.11)式 (39 ページ) によって,

$$f^{(k)}(x)=e^x \qquad (k=1, \cdots, n).$$

$$\therefore \quad f(0)=1, \quad f^{(k)}(0)=1 \qquad (k=1, \cdots, n-1).$$

したがって, マクローリンの定理によって,

$$(17.1) \quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n \quad (0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する.

例 1.　e の値を，4 捨 5 入によって，小数第 3 位まで求めよう．

(17.1)式において，$x=1$ とおけば，

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}+\frac{e^{\theta}}{n!} \qquad (0<\theta<1). \tag{17.2}$$

$$\frac{1}{2!}=0.5,\quad \frac{1}{3!}=0.16667,\quad \frac{1}{4!}=0.04167,\quad \frac{1}{5!}=0.00833,$$

$$\frac{1}{6!}=0.00139,\quad \frac{1}{7!}=0.00020,\quad \frac{1}{8!}=0.00003.$$

$$\therefore \quad e \fallingdotseq 2+0.5+0.16667+0.04167+0.00833+0.00139+0.00020=2.71826.$$

このときの誤差は，

$$\frac{e^{\theta}}{8!}<\frac{3}{8!}<0.0001$$

をこえない．したがって，$e \fallingdotseq 2.718$.　(例 1 終)

2.　$f(x)=\sin x$.

(11.9)式(39 ページ)によって，

$$f^{(k)}(x)=\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) \qquad (k=1,\cdots,2n).$$

$$\therefore \quad f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f^{(3)}(0)=-1,$$

$$f^{(4)}(0)=0,\quad f^{(5)}(0)=1,\quad f^{(6)}(0)=0,\quad f^{(7)}(0)=-1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

したがって，マクローリンの定理(前ページ)によって，

$$\sin x=0+x+0-\frac{x^3}{3!}+0+\frac{x^5}{5!}+0-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\left(\theta x+\frac{2n\pi}{2}\right)$$

ゆえに，

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\sin\theta x \qquad (0<\theta<1) \tag{17.3}$$

をみたす θ が存在する．

3． $f(x)=\cos x$.

(11.10)式 (39 ページ)によって，

$$f^{(k)}(x)=\cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\qquad(k=1,\cdots,2n+1).$$

$$\therefore\qquad f(0)=1,\quad f'(0)=0,\quad f''(0)=-1,\quad f^{(3)}(0)=0,$$
$$f^{(4)}(0)=1,\quad f^{(5)}(0)=0,\quad f^{(6)}(0)=-1,\quad f^{(7)}(0)=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

したがって，マクローリンの定理 (56 ページ) によって，

$$\cos x=1+0-\frac{x^2}{2!}+0+\frac{x^4}{4!}+0-\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos\left(\theta x+\frac{(2n+1)\pi}{2}\right).$$

ゆえに，

$$(17.4)\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\sin\theta x\qquad(0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．

4． $f(x)=\log(1+x)\qquad(x>-1)$.

(11.12)式 (39 ページ)によって，

$$f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}(k-1)!\frac{1}{(1+x)^k}\qquad(k=1,\cdots,n).$$

$$\therefore\qquad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!\qquad(k=1,\cdots,n-1).$$

したがって，マクローリンの定理によって，

$$(17.5)\quad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{n-1}$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n\qquad(0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．

5． $f(x)=(1+x)^{\alpha}\qquad(x>-1;\ \alpha$ は実数).

(11.1)式 (37 ページ)と同様にして，

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\qquad(k=1,\cdots,n).$$

ここで，§11の3項（38ページ）で導入した2項定理の係数の定義を，つぎのように一般化する：

$$\binom{\alpha}{0}\equiv 1,\quad \binom{\alpha}{k}\equiv\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\qquad (k=1,2,\cdots).$$

そのとき，

$$f^{(k)}(x)=k!\binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}\qquad (k=1,\cdots,n).$$

$$\therefore\quad f^{(k)}(0)=k!\binom{\alpha}{k}\qquad (k=0,\cdots,n-1).$$

したがって，マクローリンの定理によって，

(17．6) $$(1+x)^{\alpha}=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\cdots+\binom{\alpha}{n-1}x^{n-1}+\binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}\qquad (0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．

例 2. $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ の場合，$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}$$

$$=\frac{(-1)^k(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2^k k!}=*.$$

ここで，

(17．7) $$(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1=\frac{(2k)(2k-1)(2k-2)(2k-3)\cdots 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 4\cdot 2}=\frac{(2k)!}{2^k k!}$$

と書けることに注意すれば，

$$*=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}\qquad (k=1,\cdots,n).$$

ゆえに，(17.6)式によって，

(17．8)
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3\cdot 1}{2^2 2!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2^{n-1}(n-1)!}x^{n-1}$$

$$+\frac{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2^n n!}x^n(1+\theta x)^{-\frac{1}{2}-n}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}x^k+\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^{n+\frac{1}{2}}} \qquad (0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する. (例 2 終)

例 3. $\dfrac{3}{32\sqrt{2}}x^2\leqq\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}-1+\dfrac{1}{2}x\leqq\dfrac{3}{8}x^2 \qquad (0\leqq x\leqq1).$

例 2 において, $n=2$ とおけば,

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^2}{(1+\theta x)^{2+\frac{1}{2}}} \qquad (0<\theta<1).$$

ここで, $0\leqq x\leqq1$, $0<\theta<1$ のとき,

$$1\leqq(1+\theta x)^{2+\frac{1}{2}}\leqq2^{2+\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}$$

であることに注意すれば, もとの不等式がえられる. (例 3 終)

問 1. つぎの関係をみたす θ $(0<\theta<1)$ が存在することを証明せよ:

(1) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}+\dfrac{x^n}{(1-\theta x)^{n+1}}.$

(2) $\sinh x=x+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\sinh\theta x.$

(3) $a^x=1+x\log a+\dfrac{(x\log a)^2}{2!}+\cdots+\dfrac{(x\log a)^{n-1}}{(n-1)!}+\dfrac{(x\log a)^n}{n!}a^{\theta x}.$

(4) $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{1}{2}x+\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{(2k-3)(2k-5)\cdots3\cdot1}{2^k k!}x^k$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{2^n n!}x^n(1+\theta x)^{\frac{1}{2}-n}$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{k!(k-1)!2^{2k-1}}x^k$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{n!(n-1)!2^{2n-1}}\cdot\frac{x^n}{(1+\theta x)^{n-\frac{1}{2}}}.$$

問 2. 例 3 にならって, つぎの最初の関係式をみたす θ $(0<\theta<1)$ が存在することを示し, その結果を利用して, それにつづく不等式が, 付記の区間でなりたつことを証明せよ:

(1) $\sqrt{1+x}=1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{x^2}{(1+\theta x)^{\frac{3}{2}}};$

$$-\frac{x^2}{8}\leqq\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}\leqq-\frac{x^2}{16\sqrt{2}} \qquad (0\leqq x\leqq1).$$

（2） $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\sin\theta x$;

$$-\frac{x^4}{24} \leqq \sin x - x + \frac{x^3}{6} \leqq \frac{x^4}{24} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

（3） $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^3$;

$$\frac{x^3}{24} \leqq \log(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \leqq \frac{x^3}{3} \qquad (0 \leqq x \leqq 1).$$

問 3. 例1の方法にならって，つぎの値を，4捨5入によって，小数第3位まで求めよ:

（1） $\sqrt{e}$.　　　　（2） $\sqrt{1+\frac{1}{10}}$.

§18. テイラー展開

1. べき級数　a, a_k $(k=0, 1, \cdots)$ をあたえられた定数として，

$$f_n(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$$
$$= a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n \qquad (n=0, 1, \cdots)$$

によって定義される n 次の多項式が，$n\to\infty$ のとき，区間: $|x-a|<R$ $(\leqq\infty)$ の各点 x で，関数 $f(x)$ にかぎりなく近づくとき，多項式列 $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ は，区間: $|x-a|<R$ で，関数 $f(x)$ に**収束**するといい，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (|x-a|<R)$$

または，

$$f_n(x) \to f(x) \qquad (n\to\infty;\ |x-a|<R)$$

によって表す．さらに，そのとき，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$$
$$= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_k(x-a)^k + \cdots \qquad (|x-a|<R)$$

と書いて，$f(x)$ を x の**べき級数**という.†

2. テイラー展開　$f(x)$ が $|x-a|<R$ で何回でも微分可能(**無限回微分可能**)であるとき，テイラーの定理 (55 ページ)によって，任意の自然数 n に対して，

† べき級数の一般的な話は，§63 (231 ページ)で述べる.

(18. 1)

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}$$
$$+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \qquad (a\leqq\xi\leqq x\,;\ |x-a|<R)$$

をみたす ξ が存在する．ゆえに，もし，

(18. 2) $$\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n\to 0 \qquad (n\to\infty;\ |x-a|<R)$$

(テイラー展開可能であるための条件)

ならば，$f(x)$ はべき級数に展開できる:

(18. 3) $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \qquad (|x-a|<R).$$

(テイラー展開の定義式)

(18.3)式を $f(x)$ の**テイラー展開**または**テイラー級数**という．

テイラー展開(18.3)で，とくに，$a=0$ の場合の級数:

(18. 4) $$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (|x|<R)$$

(マクローリン展開の定義式)

を，**マクローリン展開**または**マクローリン級数**ともいう．

テイラー展開 (18.3) において，変数変換: $x=a+t$ を行えば，マクローリン展開に帰着するので，以下では簡単のために，$a=0$ の場合を考える．この場合は，テイラー展開可能であるための条件 (18.2) は，(16.10)式 (56ページ) によって，

(18. 5) $$\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\to 0 \qquad (n\to\infty;\ |x|<R).$$

(マクローリン展開可能であるための条件)

定理 18.1 $f(x)$ は $|x|<R\ (\leqq\infty)$ で無限回微分可能であって，

(18.6) $$|f^{(k)}(x)|\leqq M \qquad (|x|<R;\ k=1,2,\cdots)$$

をみたすような，x, k に関係しない定数 M が存在すれば，$f(x)$ は $|x|<R$ でテイラー展開可能である:

(18.7) $$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \qquad (|x|<R).$$

証明 仮定 (18.6) によって，剰余項 (18.5) に対して，

$$\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right|\leqq M\frac{|x|^n}{n!}=* \qquad (|x|<R).$$

ここで，$|x|<R$ の内部に任意に固定した x に対して，$m>|x|$ をみたす自然数 m が存在するから，

$$\begin{aligned}*&=M\cdot\frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{|x|}{m}\cdot\frac{|x|}{m+1}\cdots\frac{|x|}{n}\\ &\leqq M\cdot\frac{|x|^{m-1}}{(m-1)!}\cdot\frac{|x|}{n}\to 0 \qquad (n\to\infty;\ n>m).\end{aligned}$$

したがって，テイラー展開可能であるための条件 (18.5) によって，定理がえられる. (証明終)

§19. 初等関数のテイラー展開

1. $f(x)=e^x$.

公式(17.1) (56 ページ) に加えて，さらに，任意の正数 R に対して，

$$|f^{(n)}(x)|=e^x<e^R \qquad (|x|<R;\ n=0,1,\cdots)$$

がなりたつから，定理 18.1 によって，

(19.1) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots \qquad (|x|<R).$$

R は任意の正数であったから，$|x|<\infty$ で，(19.1)式がなりたつ:

(19.2) $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (|x|<\infty).$$

2． $f(x)=\sin x$.

公式(17.3)(57 ページ)に加えて，さらに，

$$|f^{(n)}(x)|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqq 1 \qquad (|x|<\infty;\ n=1, 2, \cdots)$$

がなりたつから，定理 18.1 (63 ページ) によって，

$$\text{(19. 3)} \qquad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} \qquad (|x|<\infty).$$

3． $f(x)=\cos x$.

公式(17.4)(58 ページ) に加えて，さらに，

$$|f^{(n)}(x)|=\left|\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\leqq 1 \qquad (|x|<\infty;\ n=1, 2, \cdots)$$

がなりたつから，定理 18.1 によって，

$$\text{(19. 4)} \qquad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} \qquad (|x|<\infty).$$

4． $f(x)=\log(1+x)$.

$\log(1+x)$ に対するマクローリンの定理 (17.5)(58 ページ) において，

$$\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right|=\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n\right|\leqq\frac{1}{n}\left|\frac{x}{1+\theta x}\right|^n\to 0$$

$$(n\to\infty;\ 0\leqq x\leqq 1).$$

したがって，マクローリン展開可能であるための条件 (18.5)(62 ページ) によって，

$$\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (0\leqq x\leqq 1).$$

実は，この展開は，$-1<x<0$ でもなりたつことが示されるから (§64 の問 2 の(1)(239 ページ)参照)，

$$\text{(19. 5)} \qquad \log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \qquad (-1<x\leqq 1).$$

(19.5)式で x のかわりに $-x$ とおけば,

$$(19.6)\qquad \log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(-x)^n}{n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\qquad(-1\leqq x<1).$$

(19.5)式と(19.6)式の差をとれば,

$$\begin{aligned}\log\frac{1+x}{1-x}&=\log(1+x)-\log(1-x)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}+1}{n}x^n\qquad(-1<x<1).\end{aligned}$$

ここで,

$$(-1)^{n-1}+1=\begin{cases}2 & (n=2k+1),\\ 0 & (n=2(k+1);\ k=0,1,\cdots)\end{cases}$$

に注意すれば,

$$(19.7)\qquad \log\frac{1+x}{1-x}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}x^{2k+1}\qquad(|x|<1).$$

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$　(α は定数).

$(1+x)^{\alpha}$ に対するマクローリンの定理 (17.6) (59 ページ) において,

$$\left|\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right|=\left|\binom{\alpha}{n}x^n(1+\theta x)^{\alpha-n}\right|\to 0\qquad(n\to\infty;\ |x|<1)$$

となることが示される. したがって, マクローリン展開可能であるための条件 (18.5) (62 ページ) によって,

$$\begin{aligned}(19.8)\qquad (1+x)^{\alpha}&=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\binom{\alpha}{3}x^3+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\qquad(|x|<1;\ \alpha\text{ は定数}).\end{aligned}$$

とくに, α が自然数のときには,

$$\binom{\alpha}{n}=0\qquad(n>\alpha;\ \alpha\text{ は自然数})$$

となるから, (19.8)式は 2 項定理の公式(11.6) (38 ページ) と一致する.

例. $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ の場合, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.

(19.8) と §17 の例 2 (59 ページ) によって,

(19．9)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3\cdot 1}{2^2 2!}x^2-\cdots+\frac{(-1)^n(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2^n n!}x^n+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \qquad (|x|<1).$$

(例終)

問 1. つぎの関数のマクローリン展開を求めよ:

(1) $\dfrac{1}{1+x^2}$. (2) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (3) $e^{-(2x+1)}$.

(4) a^x $(a>0)$. (5) $\cosh x$.

(6) $\sin(2x+3)$. (7) $\log(1-x-2x^2)$.

問 2. つぎの関数のマクローリン展開の x^3 の項までを求めよ:

(1) $\tan x$. (2) $\sec x$. (3) $e^x \sin x$.

(4) $\log(1+\sin x)$. (5) $e^{\frac{1}{1-x}}$.

問 3. マクローリン展開を利用して，つぎの極限値を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$. (2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$. (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1-\frac{x}{2}}{x^2}$. (5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^3}$.

§20．関数の増減と極値

1．極値をとるための必要条件 $[a, b]$ で定義された $f(x)$ について，すべての $x\in[a, b]$ に対して，

$$f(x)\geqq f(c) \qquad (f(x)\leqq f(c)) \qquad (c\in[a, b])$$

がなりたつとき，

$f(x)$ は c で**最小値**（**最大値**）$f(c)$ をとる

という．

c に十分近い，c 以外のすべての x に対して，

$$f(x)>f(c) \qquad (f(x)<f(c))$$

がなりたつとき，

$f(x)$ は c で**極小値**（**極大値**）$f(c)$ をとる

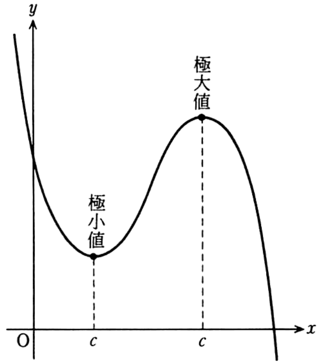


図 20.1

という(図 20.1)．極小値と極大値を総称して，**極値**という．

> **定理 20.1** $f(x)$ は $[a, b]$ で連続で，(a, b) で微分可能であるとする．そのとき，
>
> (20.1) $$f'(x)>0 \qquad (x\in(a, b))$$
>
> ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で増加の状態にある．また，
>
> $$f'(x)<0 \qquad (x\in(a, b))$$
>
> ならば，$f(x)$ は $[a, b]$ で減少の状態にある．

証明 前半: $[a, b]$ の任意の2点 x_1, x_2 ($x_1<x_2$) に対して，平均値の定理 (46 ページ) によって，

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \qquad (x_1<\xi<x_2)$$

をみたす ξ が存在する．定理の仮定 (20.1) によって，$f'(\xi)>0$ であるから，

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0.$$

ゆえに，$f(x)$ は $[a, b]$ で増加の状態にある．

後半も同様である． (証明終)

> **定理 20.2** $f(x)$ が c で微分可能で，c で極値をとれば，
>
> $$f'(c)=0.$$ **(極値をとるための必要条件)**

証明 ロールの定理の証明 (44 ページ) と同様である． (証明終)

2．極値をとるための十分条件

定理 20.3　$f(x)$ に対して，c をふくむ開区間で $f^{(n)}(x)$ が連続で，

(20.2)　　$f^{(k)}(c)=0 \qquad (k=1, \cdots, n-1)$

とする．

（i）　n が偶数の場合：

$f^{(n)}(c)>0$ ならば，$f(x)$ は c で極小値をとり，

$f^{(n)}(c)<0$ ならば，$f(x)$ は c で極大値をとる；

（極値をとるための十分条件）

（ii）　n が奇数の場合：

$f^{(n)}(c)\neq 0$ ならば，$f(x)$ は c で極値をとらない．

証明　テイラーの定理(16.9)式(56ページ)によって，

$$f(c+h)=f(c)+f'(c)h+\frac{f''(c)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}h^{n-1}$$

$$+\frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n \qquad (h\gtrless 0;\ 0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．したがって，仮定 (20.2) によって，

(20.3)　　$$f(c+h)-f(c)=\frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n.$$

（i）　n が偶数の場合：

$f^{(n)}(c)>0$ ならば，$f^{(n)}(x)$ の連続性から，$|h|$ が十分小さいかぎり，$f^{(n)}(c+\theta h)>0$．また，n が偶数であるから，$h\neq 0$ に対して $h^n>0$．

ゆえに，十分小さい $|h|\neq 0$ に対して，

$$f(c+h)-f(c)=\frac{f^{(n)}(c+\theta h)}{n!}h^n>0.$$

したがって，$f(x)$ は c で極小値をとる．

$f^{(n)}(c)<0$ の場合も同様である．

（ii）　n が奇数の場合：

$f^{(n)}(c)>0$ と仮定しよう．そのとき，$f^{(n)}(x)$ の連続性から，$|h|$ が十分小さいかぎり，$f^{(n)}(c+\theta h)>0$．n が奇数であるから，$h>0$ $(h<0)$ に対して $h^n>0$ $(h^n<0)$．ゆえに，$|h|$ が十分小さいかぎり，(20.3)式によって，

$h>0$ $(h<0)$ のとき，$f(c+h)>f(c)$ $(f(c+h)<f(c))$．

したがって，$f(x)$ は c で極値をとらない．

$f^{(n)}(c)<0$ の場合も同様である．　　（証明終）

定理 20.3 において，$n=2$ の場合を考えれば，つぎの定理がえられる：

定理 20.4　$f(x)$ に対して，c をふくむ開区間で $f''(x)$ が連続で，

$$f'(c)=0$$

であるとき，

$f''(c)>0$ ならば，$f(x)$ は c で極小値をとり，

$f''(c)<0$ ならば，$f(x)$ は c で極大値をとる．

（極値であるための十分条件）

3．曲線の凹凸　(a, b) で $f'(x)$ が増加の状態にあるとき，$f(x)$ は (a, b) で**下に凸**であるという（図 20.2）．また，(a, b) で $f'(x)$ が減少の状態にあるとき，$f(x)$ は (a, b) で**上に凸**であるという（図 20.3）．

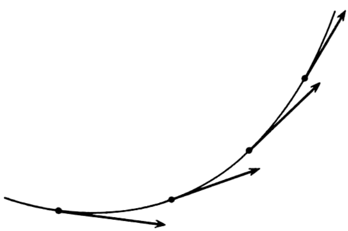


図 20.2

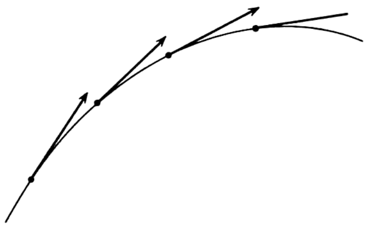


図 20.3

関数が，

下に凸である状態から，上に凸である状態にかわる点（図 20.4），

上に凸である状態から，下に凸である状態にかわる点（図 20.5）

を，ともに，**変曲点**という．

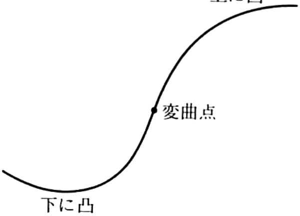


図 20.4

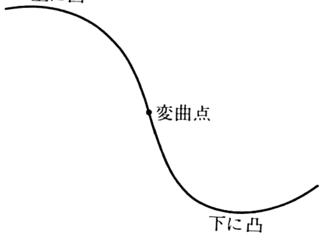


図 20.5

定理 20.5
(a, b) で $f''(x)>0$ ならば，$f(x)$ は (a, b) で下に凸であり，
(a, b) で $f''(x)<0$ ならば，$f(x)$ は (a, b) で上に凸である．

証明　定理 20.1 によって，(a, b) で $f''(x)>0$ ならば，(a, b) で $f'(x)$ が増加の状態にある．したがって，$f(x)$ は (a, b) で下に凸である．

(a, b) で $f''(x)<0$ の場合も同様である．　(証明終)

4．曲線の概形

例 1.　$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}$ であることを証明しよう．

$$f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$$

とおけば，

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}.$$

$$f''(x)=-\sin x<0 \qquad \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$$

だから，$f'(x)$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少．

$$f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0, \qquad f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}<0.$$

$$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

$$\therefore \qquad f(x)>0 \quad \left(0<x<\frac{\pi}{2};\ 表\ 20.1\right).$$

(例 1 終)

表 20.1

x	0	$\cdots$	$\cos^{-1}\dfrac{2}{\pi}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
f'	$+$	$+$	0	$-$	$-$
f''		$-$	$-$	$-$	
f		上に凸			
	0	↗	極大	↘	0

例 2.　$f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

の増減，凹凸，極値，などをしらべて，グラフの概形をかこう．

$$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{(x-1)(x+1)}{x^2}.$$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3}.$$

したがって，$f(x)$ の増減，凹凸は，表 20.2 のようになり，$f(x)$ は，

$$x=-1 \text{ で極大値 } -2, \qquad x=1 \text{ で極小値 } 2$$

をとる．

表 20.2

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	-0	$+0$	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
f'	$1-0$	$+$	0	$-$	$-\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$	$1-0$
f''		$-$	$-$	$-$			$+$	$+$	$+$	
f		上に凸					下に凸			
	$-\infty$	↗	-2 極大	↘	$-\infty$	∞	↘	2 極小	↗	∞

さらに,

$$\lim_{x\to -0} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to +0} f(x) = \infty$$

だから, $x \to \pm 0$ のとき, 曲線: $y=f(x)$ と y-軸の距離はかぎりなく 0 に近づく. このとき, y-軸を, 曲線: $y=f(x)$ の $x \to \pm 0$ のときの**漸近線**という. また,

$$|f(x)-x| = \frac{1}{|x|} \to 0 \qquad (x \to \pm\infty)$$

であるから, $x \to \pm\infty$ のとき, 曲線: $y=f(x)$ と直線: $y=x$ の距離はかぎりなく 0 に近づく. ゆえに, 直線: $y=x$ も $x \to \pm\infty$ のときの漸近線である.

以上から, 曲線: $y=f(x)$ のグラフは, 図 20.6 のようになる.

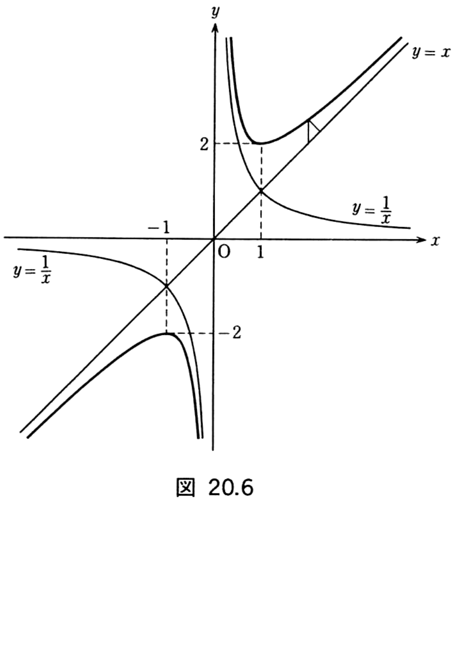


図 20.6 (例 2 終)

例 3.　$f(x)=x^2e^{-x}$

の増減，凹凸，極値，などをしらべて，グラフの概形をかこう．

$$f'(x)=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=(2x-x^2)e^{-x}=x(2-x)e^{-x}.$$

$$f''(x)=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}=(2-4x+x^2)e^{-x}$$

$$=\{x-(2+\sqrt{2})\}\{x-(2-\sqrt{2})\}e^{-x}.$$

したがって，$f(x)$の増減，凹凸は，表 20.3 のようになり，

$$x=0 \text{ で極小値 } 0,\qquad x=2 \text{ で極大値 } 4e^{-2}$$

をとる．

表 20.3

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	$2+\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
f'	$-\infty$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	-0
f''		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f		下に凸			変曲点	上に凸			変曲点	下に凸	
	∞	↘	0 極小	↗			$\frac{4}{e^2}$ 極大	↘			$+0$

さらに，ロピタルの定理を 2 回くりかえし用いることによって，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

したがって，x-軸は，$x\to\infty$ のときの曲線：$y=f(x)$の漸近線．また，

$$\lim_{x\to-\infty} x^2e^{-x}=\infty.$$

以上のことから，曲線：$y=f(x)$ のグラフは，図 20.7 のようになる．

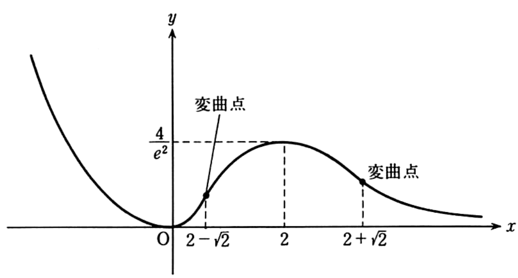


図 20.7　　　(例 3 終)

5．極座標と極方程式　直交座標系 O-xy に関する点 P の直交座標 (x, y) と**極座標** (r, θ) との関係は，

(20．4)　$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$　$(r>0$; 図 20.8$)$.

これから逆に，

(20．5)　$r=\sqrt{x^2+y^2},\quad \tan\theta=\dfrac{y}{x}$.

極座標で表された曲線の方程式を**極方程式**という．

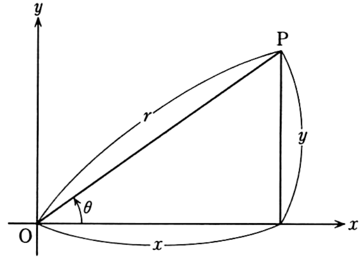


図 20.8

例 4． カージオイド（ハート形）：$r=a(1+\cos\theta)$　$(a>0)$.

$r=a\{1+\cos(-\theta)\}=a(1+\cos\theta)$ であるから，グラフは x-軸に関して対称である．

$$\frac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta.$$

したがって，r は $0\leqq\theta\leqq\pi$ で減少の状態にあり（表 20.4），グラフの概形は，図 20.9 のようになる．

表 20.4

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{3\pi}{4}$	$\cdots$	π
$\dfrac{dr}{d\theta}$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
r	$2a$	↘	$\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)a$	↘	a	↘	$\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)a$	↘	0

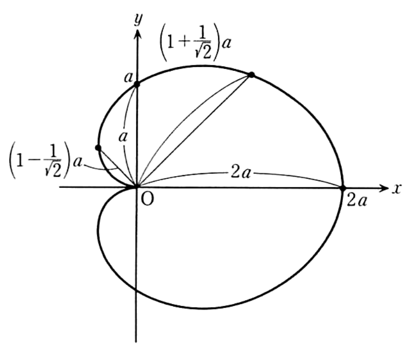


図 20.9　（例 4 終）

問 1. つぎの関数は，付記の区間で，増加の状態にあることを証明せよ:

（1） $y=x^3+3x^2+9x-1 \quad (-\infty<x<\infty)$.

（2） $y=e^x-1-x \quad (x\geqq 0)$.

問 2. つぎの不等式が，付記の区間で，なりたつことを証明せよ:

（1） $2x^3+3x^2-12x+7>0 \quad (x>1)$.

*（2） $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x \quad \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

（3） $x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x \quad (x>0)$.

（4） $\dfrac{x}{1+x^2}<\tan^{-1}x<x \quad (x>0)$.

問 3. つぎの関数の増減，凹凸，極値，などをしらべて，グラフの概形をかけ:

（1） $y=x^3-x^2-x+1$.

（2） $y=x^4-2x^2+2$.

（3） $y=3x^5-5x^3-1$.

（4） $y=\cos x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$.

（5） $y=\tanh x$.

（6） $y=xe^{-x}$.

（7） $y=x-\log(1+x) \quad (x>-1)$.

（8） $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1-x}$.

（9） $y=\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{18}{x}$.

（10） $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$.

*（11） $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$.

（12） $y=x-\sqrt{x} \quad (x\geqq 0)$.

（13） $y=x+\sqrt{4-x^2} \quad (-2\leqq x\leqq 2)$.

（14） $y=e^{-\frac{x^2}{2}}$.

問 4. つぎの関数の，付記の区間での，最大値，最小値を求めよ:

（1） $f(x)=\sin x(1+\cos x) \quad (0\leqq x\leqq \pi)$.

（2） $f(x)=2\cos x+\cos 2x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$.

（3） $f(x)=x+2\cos x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$.

（4） $f(x)=\cos 2x-2\sin x \quad (0\leqq x\leqq 2\pi)$.

（5） $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x+1} \quad (0\leqq x\leqq 5)$.

問 5. つぎの極方程式のグラフの概形をかけ ($a>0$):

（1） $r=a\cos 2\theta$.　（2） $r=a\theta$ （アルキメデスのらせん）.

6

偏微分法

§ 21. 極限値と連続関数

1. 多変数関数 3変数以上の関数: $z=f(x_1, \cdots, x_n)$ $(n \geqq 3)$ の場合も, ほぼ, 同様であるので, 2変数の関数: $z=f(x, y)$ の場合について述べよう.

1変数の関数: $y=f(x)$ の場合, 定義域は一般に区間であって, その区間で, $f(x)$ の連続性, 微分可能性 などの性質を調べてきた.

2変数の関数:

$$z=f(x, y)$$

の場合, 定義域としては, 一般に, 領域が採用される. これから考える領域は, 図21.1のような, 有限個の閉じた曲線でかこまれた領域, ないしは, 図21.2のように無限にひろがった領域である. 前者を, とくに, **有界領域**とよぶ. 領域といえば, ふつう, その境界をふくめないが, 領域にその境界を加えたものを**閉領域**という.

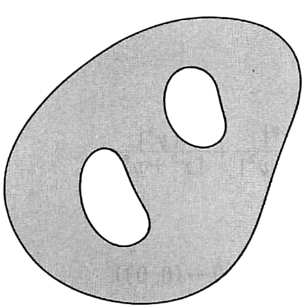


図 21.1

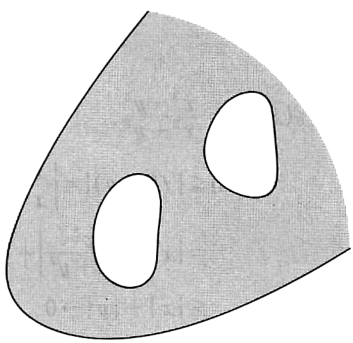


図 21.2

領域 D で定義された関数: $z=f(x, y)$ は，幾何学的には，空間での曲面を定義すると解釈してよいであろう(図 21.3). $f(x, y)$ の連続性，微分可能性などを利用して，この曲面の滑らかさや凹凸，極大点，極小点などを調べることができる.

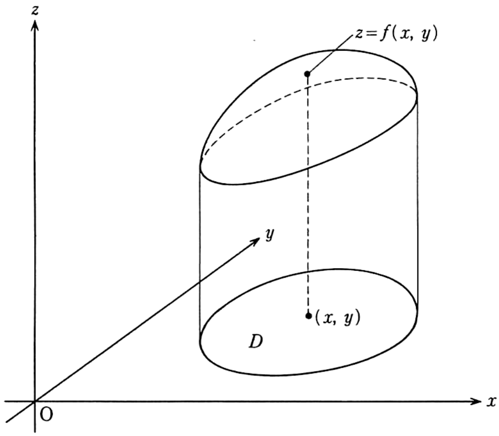


図 21.3

2. 極限値　　平面上の点 (x, y) が，点 (a, b) 以外の点をかわりながら (a, b) にかぎりなく近づくとき，関数 $f(x, y)$ の値が一定の値 α にかぎりなく近づくならば，

(x, y) が (a, b) に近づくときの $f(x, y)$ の**極限値**は α である

といい，

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)=\alpha,$$

$$\lim_{x\to a, y\to b} f(x, y)=\alpha,$$

$$f(x, y)\to\alpha \qquad ((x, y)\to(a, b)),$$

などで表す.

例.　$f(x, y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$.

$$0\leqq|f(x, y)|=\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\leqq\frac{|x^3|}{|x^2+y^2|}+\frac{|y^3|}{|x^2+y^2|}$$

$$=|x|\cdot\left|\frac{x^2}{x^2+y^2}\right|+|y|\cdot\left|\frac{y^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leqq|x|+|y|\to0 \qquad ((x, y)\to(0, 0)).$$

$$\therefore\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0.$$

(例終)

3. 基本定理　関数の極限値に関しては，つぎの定理が基本的である：

定理 21.1

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=\alpha, \qquad \lim_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y)=\beta$$

であるとき，

（i）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} cf(x,y)=c\alpha$　（c は定数）；

（ii）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \{f(x,y)\pm g(x,y)\}=\alpha\pm\beta$；

（iii）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)g(x,y)=\alpha\beta$；

（iv）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\alpha}{\beta}$　（ここで $\beta\neq 0$）．

（2 変数関数の極限値の基本定理）

4. 連続関数　関数 $f(x,y)$ が，つぎの 3 つの条件をみたすとき，$f(x,y)$ は**点 (a,b) で連続**であるという：

（i）(a,b) は $f(x,y)$ の定義域に属している；

（ii）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ が存在する；

（iii）$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ と $f(a,b)$ が等しい：$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=f(a,b)$.

関数 $f(x,y)$ が，領域 D のすべての点で連続であるとき，$f(x,y)$ は**領域 D で連続**であるという．

定理 21.1 から，つぎの定理がえられる：

定理 21.2　$f(x,y)$，$g(x,y)$ が (a,b) で連続ならば，

（i）$cf(x,y)$　（c は定数），

（ii）$f(x,y)\pm g(x,y)$，

（iii）$f(x,y)g(x,y)$，

（iv）$\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$　（$g(a,b)\neq 0$）

は，それぞれ，(a,b) で連続である．　**（2 変数連続関数の基本定理）**

証明　定理 21.1 で，$\alpha=f(a,b)$，$\beta=g(a,b)$ とおけばよい．　（証明終）

問 1. （1） $f(x, y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, （2） $f(x, y)=\dfrac{x}{x-y}$,

＊（3） $f(x, y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, ＊（4） $f(x, y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

について,

（i） $\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x, y)\right)$, $\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x, y)\right)$ を求めよ;

（ii） 直線: $y=mx$ にそって, $(x, y)\to(0, 0)$ のときの $f(x, y)$ の極限値を求めよ;

（iii） $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ は存在しないことを確かめよ;

一般に,（i）の2種類の極限値を, ともに, **累次極限値**という.

問 2. 例にならって, つぎの極限値を求めよ:

（1） $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. （2） $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

§22. 偏導関数

1. 偏導関数 $z=f(x, y)$ の y を定数とみなしたときの, x についての微分係数:

$$f_x(x, y)\equiv\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y)-f(x, y)}{h}$$

が存在するならば, この $f_x(x, y)$ を, $f(x, y)$ の**点** (x, y) **における** x **に関する偏微分係数**といい, $f(x, y)$ は (x, y) で x **に関して偏微分可能**であるという.

同様に, x を定数とみなしたときの, y についての微分係数:

$$f_y(x, y)\equiv\lim_{k\to 0}\frac{f(x, y+k)-f(x, y)}{k}$$

が存在するならば, この $f_y(x, y)$ を, $f(x, y)$ の**点** (x, y) **における** y **に関する偏微分係数**といい, $f(x, y)$ は (x, y) で y **に関して偏微分可能**であるという.

$f(x, y)$ が領域 D の各点で x に関して（y に関して）偏微分可能であるとき, $f(x, y)$ は**領域** D **で** x **に関して**（y **に関して**）**偏微分可能**であるといい, 関数 $f_x(x, y)$ （$f_y(x, y)$） を x **に関する**（y **に関する**）**偏導関数**という.

偏導関数を表す記号としては, $f_x(x, y)$ のほかに,

$$z_x,\quad \frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y),\quad D_x z$$

などが用いられる. $f_y(x, y)$ についても同様である.

例． $z=\log\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)\qquad(x^2+y^2\neq 0).$

$$z_x=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$z_y=\frac{1}{2}\cdot\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{y}{x^2+y^2}.$$

（例終）

問． つぎの関数の偏導関数を求めよ:

(1) $z=x+y.$

(2) $z=x^2+y^2.$

(3) $z=x^2+2xy+3y^2.$

(4) $z=x^3-3xy+y^3.$

(5) $z=e^{x+y}.$

(6) $z=e^{xy}.$

(7) $z=\cos(x+y).$

(8) $z=\sin xy.$

(9) $z=x\cos y.$

(10) $z=e^x\sin y.$

(11) $z=\sin x\cos y.$

(12) $z=\sqrt{x^2-y^2}.$

(13) $z=\dfrac{y}{x+y}.$

*(14) $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}.$

§ 23．全微分可能性

1．全微分可能性　$f(x,y)$ は (x,y) で x, y に関して偏微分可能であって,

> (23.1)
> $$f(x+h,\ y+k)-f(x,y)=hf_x(x,y)+kf_y(x,y)+\sigma(x,y;\ h,k),$$
> (23.2) $$\frac{\sigma(x,y;\ h,k)}{|h|+|k|}\to 0\qquad(h,k\to 0)$$
> **（全微分可能の定義式）**

がなりたつとき, $f(x,y)$ は点 (x,y) で**全微分可能**であるという.

2．全　微　分　点 (x,y) における x, y の増分 Δx, Δy に対して,

(23.3) $$df=df(x,y)\equiv f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

を $f(x,y)$ の点 (x,y) における**全微分**という.

$f(x,y)\equiv x$ のとき,

$$f_x=1,\qquad f_y=0$$

であるから, (23.3)式によって,

$$dx=1\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=\Delta x.$$

したがって，関数 x の全微分 dx は，

(23. 4) $$dx=\Delta x.$$

同様にして，関数 y の全微分 dy は，

(23. 5) $$dy=\Delta y.$$

関係式 (23.4)，(23.5) を用いれば，全微分の式 (23.3) は，

(23. 6) $\quad df=f_x(x,y)\,dx+f_y(x,y)\,dy$ **(全微分の公式)**

と書ける．

3. 幾何学的意味 図 23.1 において，

曲面 PQSR: 曲面 $z=f(x,y)$ の長方形 ABCD 上にある部分

曲線 $\widehat{PQ}$: 曲面 $z=f(x,y)$ の平面: $y=b$ による切り口の曲線

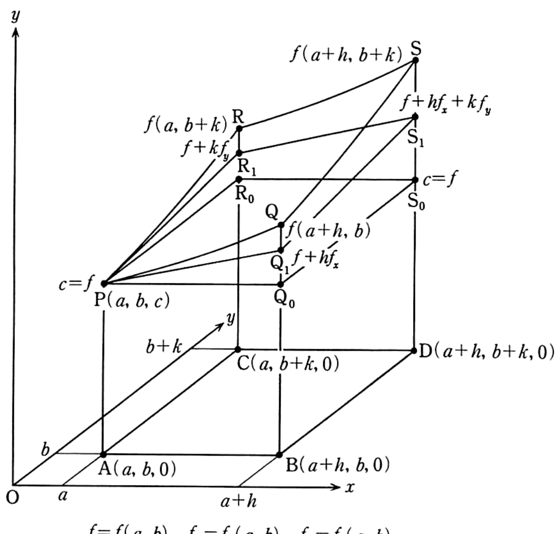
線分 PQ_1: 曲線 $\widehat{PQ}$ の点 $P(a,b,c)$ における接線

曲線 $\widehat{PR}$: 曲面 $z=f(x,y)$ の平面: $x=a$ による切り口の曲線

線分 PR_1: 曲線 $\widehat{PR}$ の点 $P(a,b,c)$ における接線

平面 $PQ_1S_1R_1$: 2 線分 PQ_1, PR_1 をふくむ平面

とする．



$f=f(a,b)$, $f_x=f_x(a,b)$, $f_y=f_y(a,b)$

図 23.1

曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 P における接平面が存在すれば，それは平面 $PQ_1S_1R_1$ によってあたえられる．簡単のために，

$$f_x=f_x(a,b), \qquad f_y=f_y(a,b)$$

とおくとき，f_x，f_y は，それぞれ，線分 PQ_1，PR_1 の勾配をあたえる（f_x，f_y の幾何学的意味）から，図 23.1 を参照すれば，

$$Q_0Q_1=hf_x, \qquad R_0R_1=kf_y;$$

(23．7)　$$\therefore \quad S_0S_1=Q_0Q_1+R_0R_1=hf_x+kf_y$$　（図 23.2）．

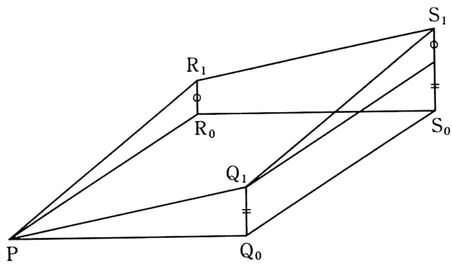


図 23.2

ここで，$h=\Delta x$，$k=\Delta y$ とおけば，

$$S_0S_1=f_x\Delta x+f_y\Delta y=df.$$

これが全微分の幾何学的意味である．

また，曲面 $z=f(x,y)$ 上の点 $P(a,b,c)$ における接平面が存在するとき，

$$h=x-a, \quad k=y-b, \quad S_0S_1=z-c$$

とおけば，その接平面の方程式は，(23.7)式によって，

(23．8)　$$z-c=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b) \qquad (c=f(a,b)).$$

（接平面の方程式）

さて，$f(x,y)$ が (a,b) で全微分可能であると仮定する．

$$\begin{aligned} S_1S &= S_0S-S_0S_1 \\ &= \{f(a+h,\ b+k)-f(a,b)\}-\{hf_x(a,b)+kf_y(a,b)\} \\ &= \sigma(a,b;\ h,k), \end{aligned}$$

$r\equiv AD=\sqrt{h^2+k^2}$ であって，

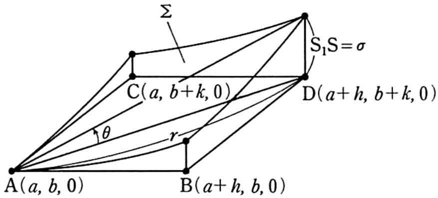
$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|h|+|k|)\leqq\sqrt{h^2+k^2}\leqq|h|+|k|$$

がなりたつことに注意すれば，全微分可能であるための条件 (23.2)は，

$$\text{(23. 9)} \qquad \frac{S_1S}{AD}=\frac{\sigma(a,b;\ h,k)}{r}\to 0 \qquad (r\to 0).$$

と同値である．

$$\frac{S_1S}{AD}=\tan\theta \qquad \text{(図 23.3)}$$



Σ は曲面: $z=f(x,y)-\{c+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)\}$ を表す

図 23.3

とおけば，(23.9)式は

$$\text{(23. 10)} \qquad \tan\theta\to 0 \qquad (r\to 0)$$

と同値である．条件 (23.10)がみたされるとき，方程式 (23.8)によって定義される平面を，曲面 $z=f(x,y)$ の点 $P(a,b,c)$ における**接平面**という．したがって，

$f(x,y)$の全微分可能性は，曲面 $z=f(x,y)$ の接平面が存在するための条件である．

といえる．

4. 全微分可能であるための十分条件

> **定理 23.1**　$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が連続な点で，$f(x,y)$ は全微分可能である．　　　(**全微分可能であるための十分条件**)

証明

$$\text{(23. 11)} \qquad f(x+h,\ y+k)-f(x,y)$$
$$=f(x+h,\ y+k)-f(x,y+k)+f(x,y+k)-f(x,y).$$

ここで，平均値の定理(14.8)式 (48 ページ)によって，

$$\text{(23. 12)} \qquad f(x+h,\ y+k)-f(x,y+k)=h\,f_x(x+\theta_1 h,\ y+k) \qquad (0<\theta_1<1),$$

$$\text{(23. 13)} \qquad f(x,y+k)-f(x,y)=k\,f_y(x,y+\theta_2 k) \qquad (0<\theta_2<1)$$

をみたす θ_1, θ_2 が存在する. (23.11)式, (23.12)式, (23.13)式によって,

$$(23.14)\qquad f(x+h,\ y+k)-f(x,y) = hf_x(x+\theta_1 h,\ y+k)+kf_y(x,\ y+\theta_2 k).$$

$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は (x,y) で連続であるから,

$$(23.15)\qquad f_x(x+\theta_1 h,\ y+k)=f_x(x,y)+\varepsilon_1,$$

$$(23.16)\qquad f_y(x,\ y+\theta_2 k)=f_y(x,y)+\varepsilon_2$$

とおけば,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_x(x+\theta_1 h,\ y+k)=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\{f_x(x,y)+\varepsilon_1\}=f_x(x,y),$$

$$\lim_{k\to 0} f_y(x,\ y+\theta_2 k)=\lim_{k\to 0}\{f_y(x,y)+\varepsilon_2\}=f_y(x,y).$$

$$(23.17)\qquad \therefore\quad \varepsilon_1\to 0,\quad \varepsilon_2\to 0\qquad (h,k\to 0).$$

したがって, (23.15)式, (23.16)式を(23.14)式に代入すれば,

$$(23.18)\qquad f(x+h,\ y+k)-f(x,y)=hf_x(x,y)+kf_y(x,y)+\sigma \qquad (\sigma=h\varepsilon_1+k\varepsilon_2)$$

と書けて, (23.17)式によって,

$$(23.19)\qquad \frac{|\sigma|}{|h|+|k|}\leqq\frac{|h|}{|h|+|k|}|\varepsilon_1|+\frac{|k|}{|h|+|k|}|\varepsilon_2| \leqq|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0 \qquad (h\to 0,\ k\to 0).$$

(23.18)式と(23.19)式は, $f(x,y)$ が全微分可能であることを示している.

(証明終)

問 1. §22 の問 (79 ページ) の各関数: (1)〜(14) の全微分を求めよ.

問 2. つぎの関数によって定義される曲面上の1点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ における接平面の方程式を求めよ:

(1) $z=2x+3y+1$.　　(2) $z=x^2+y^2$.

(3) $z=x^3+y^3$.　　(4) $z=xy$.

(5) $z=\dfrac{1}{x+y}$.　　(6) $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

(7) $z=\dfrac{1}{xy}$.　　(8) $z=\sqrt{r^2-x^2-y^2}$.

§ 24. 高階偏導関数

1. 高階偏導関数　$z=f(x,y)$ の偏導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ は, x, y の関数であって, これらが, また, x, y に関して偏微分可能であるとき,

$$\frac{\partial}{\partial x}\{f_x(x,y)\},\quad \frac{\partial}{\partial y}\{f_x(x,y)\},\quad \frac{\partial}{\partial x}\{f_y(x,y)\},\quad \frac{\partial}{\partial y}\{f_y(x,y)\}$$

を考えることができる. これらを $f(x,y)$ の **2階**(または, **2次**)**偏導関数**といい, それぞれ,

$$\begin{array}{cccc} f_{xx}(x,y), & f_{xy}(x,y), & f_{yx}(x,y), & f_{yy}(x,y); \\ z_{xx}, & z_{xy}, & z_{yx}, & z_{yy}; \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, & \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}, & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}, & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}; \\ D_{xx}z, & D_{xy}z, & D_{yx}z, & D_{yy}z \end{array}$$

などの記号で表す.

より**高階**(**高次**)の**偏導関数**も, 同様に定義できる. たとえば,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=z_{xxx}=f_{xxx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y\partial x}=z_{xyx}=f_{xyx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial y\partial x}=z_{xyy}=f_{xyy}(x,y),\ \text{など.}$$

2. $f_{xy}=f_{yx}$ の十分条件　さて, f_{xy} と f_{yx} とに関しては, つぎの定理がある:

> **定理 24.1**　$f_{xy}(x,y)$ と $f_{yx}(x,y)$ が連続な点 (x,y) で,
>
> $$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y).$$

証明　$\varphi(x)\equiv f(x,y+k)-f(x,y)$,　$\psi(y)\equiv f(x+h,y)-f(x,y)$

とおけば (つぎのページの図 24.1),

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}f &\equiv f(x+h,\ y+k)-f(x+h,y)-f(x,y+k)+f(x,y)\\ &=\varphi(x+h)-\varphi(x)=\psi(y+k)-\psi(y).\end{aligned}$$

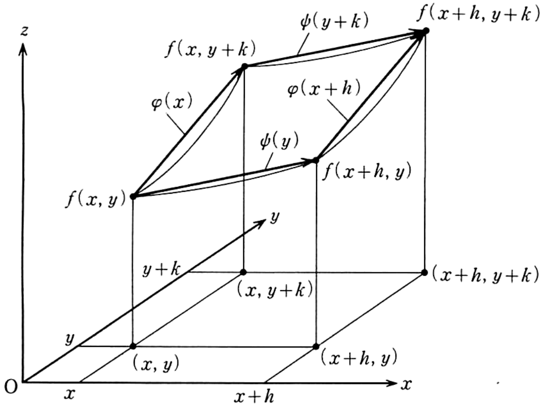


図 24.1

平均値の定理(14.8)式(48 ページ)によって,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}f &= \varphi(x+h)-\varphi(x)\\ &= h\varphi'(x+\theta_1 h) \qquad (0<\theta_1<1;\ \text{変数 } x \text{ について平均値の定理})\\ &= h\{f_x(x+\theta_1 h,\ y+k)-f_x(x+\theta_1 h,\ y)\}\\ &= hk\,f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k) \qquad (0<\theta_2<1;\ \text{変数 } y \text{ について平均値の定理}).\end{aligned}$$

同様に,平均値の定理 (14.8)式 によって,

$$\begin{aligned}\Delta_{xy}f &= \psi(y+k)-\psi(y)\\ &= k\psi'(y+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_3<1;\ \text{変数 } y \text{ について平均値の定理})\\ &= k\{f_y(x+h,\ y+\theta_3 k)-f_y(x,\ y+\theta_3 k)\}\\ &= kh\,f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k) \qquad (0<\theta_4<1;\ \text{変数 } x \text{ について平均値の定理}).\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\Delta_{xy}f}{hk}=f_{xy}(x+\theta_1 h,\ y+\theta_2 k)=f_{yx}(x+\theta_4 h,\ y+\theta_3 k).$$

ここで, $h\to 0$, $k\to 0$ とすれば, f_{xy}, f_{yx} の (x, y) での連続性の仮定から,

$$f_{xy}(x, y)=f_{yx}(x, y). \qquad \text{(証明終)}$$

この定理から,関数 $f(x, y)$ の各階の偏導関数が連続であるかぎり, x または y に関する偏微分の順序に関係しないことがわかる.たとえば,

$$f_{xyxyx}=f_{xxyxy}=f_{xxxyy}, \text{ など}.$$

例. $z=\log\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\log(x^2+y^2).$

§22 の例 (79 ページ) によって,

$$z_{xx}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z_{xy}=-\frac{x\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$z_{yx}=-\frac{y\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=z_{xy},$$

$$z_{yy}=\frac{1\cdot(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

とくに,

(24.1) $$\Delta z\equiv z_{xx}+z_{yy}=0.$$ (例終)

ここで, 方程式 (24.1) を**ラプラス方程式**とよび, また, 一般に, 方程式 (24.1)式をみたす関数 $z=f(x, y)$ を**調和関数**という. いずれも, 応用上, 重要な方程式と関数である.

問. §22 の問 (79 ページ) の各関数 (1)～(14) の 2 階偏導関数を求めよ.

7

2変数合成関数の微分

§25. 合成関数の微分

1. 合成関数の偏微分

定理 25.1 $z=f(x,y)$ が全微分可能で，$x=\varphi(u,v)$，$y=\psi(u,v)$ が，ともに，偏微分可能ならば，合成関数：

$$z=f(\varphi(u,v),\ \psi(u,v))$$

は偏微分可能であって，

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{25.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \tag{25.2}$$

（合成関数の偏微分の公式）

証明 u の増分 Δu に対する x, y, z の増分を，それぞれ，Δx，Δy，Δz とする：

$$\Delta x=\varphi(u+\Delta u,v)-\varphi(u,v),\qquad \Delta y=\psi(u+\Delta u,v)-\psi(u,v),$$
$$\Delta z=f(\varphi(u+\Delta u,v),\ \psi(u+\Delta u,v))-f(\varphi(u,v),\ \psi(u,v)).$$

そのとき，

$$\varphi(u+\Delta u,v)=\varphi(u,v)+\Delta x=x+\Delta x,$$
$$\psi(u+\Delta u,v)=\psi(u,v)+\Delta y=y+\Delta y.$$
$$\therefore\quad \Delta z=f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y).$$
$$\therefore\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta u}=*.$$

ここで，$f(x, y)$ の全微分可能性によって，

(25.3) $$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y) = f_x(x, y)\cdot\Delta x+f_y(x, y)\cdot\Delta y+\sigma \qquad (\sigma=\sigma(x, y;\ \Delta x, \Delta y)),$$

(25.4) $$\frac{\sigma}{|\Delta x|+|\Delta y|}\to 0 \qquad (\Delta x\to 0,\ \Delta y\to 0).$$

$$\therefore\qquad * = \lim_{\Delta u\to 0}\left\{f_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta u}+f_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta u}+\frac{\sigma}{\Delta u}\right\}=**;$$

ここで，$\varphi(u, v)$，$\psi(u, v)$ の偏微分可能性：

$$\frac{\Delta x}{\Delta u}\to\varphi_u(u, v), \qquad \frac{\Delta y}{\Delta u}\to\psi_u(u, v) \qquad (\Delta u\to 0)$$

と定理 3.1 (9 ページ) による，

$$\Delta x=\varphi(u+\Delta u, v)-\varphi(u, v)\to 0 \qquad (\Delta u\to 0),$$
$$\Delta y=\psi(u+\Delta u, v)-\psi(u, v)\to 0 \qquad (\Delta u\to 0)$$

に注意すれば，(25.4)式によって，

(25.5) $$\left|\frac{\sigma}{\Delta u}\right|=\frac{|\sigma|}{|\Delta x|+|\Delta y|}\cdot\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta u}\right|+\left|\frac{\Delta y}{\Delta u}\right|\right)\to 0 \qquad (\Delta u\to 0).$$

したがって，

$$** = f_x(x, y)\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta u}+f_y(x, y)\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}+\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\sigma}{\Delta u}$$
$$= f_x(x, y)\varphi_u(u, v)+f_y(x, y)\psi_u(u, v).$$

同様にして，(25.2)式もえられる． (証明終)

2. 2変数合成関数の微分

定理 25.2 $z=f(x, y)$ が全微分可能で，$x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ が，ともに，微分可能ならば，合成関数：

$$z=f(\varphi(t),\ \psi(t))$$

は微分可能であって，

(25.6)
$$\frac{df(\varphi(t),\ \psi(t))}{dt}=f_x(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t);$$

すなわち，

(25.7) $$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$ **(2変数合成関数の微分の公式)**

証明 定理 25.1 において，$\varphi(u, v)$，$\psi(u, v)$ を，ともに，v に無関係な u だけの関数と考え，$u=t$ とおけば，公式 (25.1) から，公式 (25.7) がえられる． (証明終)

3． 直交座標と極座標

例 1. $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

$$x_r=\cos\theta,\qquad y_r=\sin\theta;$$
$$x_\theta=-r\sin\theta,\qquad y_\theta=r\cos\theta$$

に注意すれば，合成関数の偏微分の公式によって，

$$(25.8)\qquad z_r=z_x x_r+z_y y_r=z_x\cos\theta+z_y\sin\theta,$$

$$(25.9)\qquad z_\theta=z_x x_\theta+z_y y_\theta=z_x(-r\sin\theta)+z_y(r\cos\theta).$$

(25.8)式$\times r\cos\theta-$(25.9)式$\times\sin\theta$ をつくって，z_x について解けば，

$$z_x=\frac{r\cos\theta\cdot z_r-\sin\theta\cdot z_\theta}{r(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=\cos\theta\cdot z_r-\frac{\sin\theta}{r}\cdot z_\theta.$$

(25.8)式$\times r\sin\theta+$(25.9)式$\times\cos\theta$ をつくって，z_y について解けば，

$$z_y=\frac{r\sin\theta\cdot z_r+\cos\theta\cdot z_\theta}{r(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}=\sin\theta\cdot z_r+\frac{\cos\theta}{r}\cdot z_\theta.$$

$$(25.10)\qquad \therefore\qquad {z_x}^2+{z_y}^2={z_r}^2+\frac{{z_\theta}^2}{r^2}.$$

（例 1 終）

例 2. $z=f(x,y)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

(25.8)式を利用すれば，

$$z_{rr}=(z_x)_r\cos\theta+(z_y)_r\sin\theta=*.$$

ここで，z_x, z_y を，それぞれ，(25.8)式の z とみなして，(25.8)式を利用すれば，

$$\begin{aligned}*&=(z_{xx}\cos\theta+z_{xy}\sin\theta)\cos\theta+(z_{yx}\cos\theta+z_{yy}\sin\theta)\sin\theta\\&=z_{xx}\cos^2\theta+2z_{xy}\sin\theta\cos\theta+z_{yy}\sin^2\theta\qquad(\because\quad z_{xy}=z_{yx}).\end{aligned}$$

(25.9)式を利用すれば，

$$\begin{aligned}z_{\theta\theta}&=(z_x)_\theta(-r\sin\theta)+z_x(-r\sin\theta)_\theta+(z_y)_\theta(r\cos\theta)+z_y(r\cos\theta)_\theta\\&=(z_x)_\theta(-r\sin\theta)+z_x(-r\cos\theta)+(z_y)_\theta(r\cos\theta)+z_y(-r\sin\theta)=**.\end{aligned}$$

ここで，z_x, z_y を，それぞれ，(25.9)式の z とみなして，(25.9)式を利用すれば，

$$\begin{aligned}**&=\{z_{xx}(-r\sin\theta)+z_{xy}(r\cos\theta)\}(-r\sin\theta)+z_x(-r\cos\theta)\\&\quad+\{z_{yx}(-r\sin\theta)+z_{yy}(r\cos\theta)\}(r\cos\theta)+z_y(-r\sin\theta)\\&=r^2(z_{xx}\sin^2\theta-2\,z_{xy}\sin\theta\cos\theta+z_{yy}\cos^2\theta)-r(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta).\end{aligned}$$

したがって，(25.8)式に注意すれば，

$$z_{rr}+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}=z_{xx}(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+z_{yy}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$-\frac{1}{r}(z_x\cos\theta+z_y\sin\theta)$$
$$=z_{xx}+z_{yy}-\frac{1}{r}z_r.$$

(25.11) $\therefore\quad \Delta z\equiv z_{xx}+z_{yy}=z_{rr}+\frac{1}{r}z_r+\frac{1}{r^2}z_{\theta\theta}.$

（ラプラシアンの極座標表示）

（例2終）

問 1. 合成関数の微分の公式 (25.7) を用いて，つぎの合成関数について，$\dfrac{dz}{dt}$ を求めよ:

（1） $z=y^2-x,\quad x=pt^2,\quad y=2pt\quad$（$p$ は定数）.

（2） $z=x^2+y^2,\quad x=2\cos t,\quad y=3\sin t.$

（3） $z=x^2-y^2,\quad x=\cosh t,\quad y=2\sinh t.$

（4） $z=\sin x\cos y,\quad x=e^t,\quad y=\log t.$

（5） $z=\cos x\sinh y,\quad x=t^2,\quad y=\log t.$

*（6） $z=\log(x^2+y^2),\quad x=a\cos t,\quad y=b\sin t\quad(a>0,\ b>0).$

問 2. 合成関数の偏微分の公式 (25.1), (25.2) を用いて，つぎの合成関数について，z_u, z_v を求めよ:

（1） $z=e^x\cos y,\quad x=u-v,\quad y=u+v.$

（2） $z=\sin(x^2+y^2),\quad x=u-v,\quad y=uv.$

（3） $z=(x+y)^2,\quad x=\sin\dfrac{v}{u},\quad y=\cos\dfrac{u}{v}.$

（4） $z=\sin x\cosh y,\quad x=\log\sqrt{u^2+v^2},\quad y=\tan^{-1}\dfrac{v}{u}.$

*（5） $z=\log\sqrt{x^2+y^2},\quad x=u^2-v^2,\quad y=2uv.$

*（6） $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x},\quad x=u^2-v^2,\quad y=2uv.$

***問 3.** $z=f(x,y)$, $x=u\cos\alpha-v\sin\alpha$, $y=u\sin\alpha+v\cos\alpha$（$\alpha$ は定数）のとき，つぎの等式がなりたつことを証明せよ:

（1） $\left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$　（2） $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

§26. 2変数の平均値の定理

1. 2変数の平均値の定理

定理 26.1 $f(x, y)$ が，点 (x, y) と点 $(x+h,\ y+k)$ を結ぶ線分をふくむ領域で，全微分可能ならば，

(26.1) $$f(x+h, y+k)-f(x, y)$$
$$=hf_x(x+\theta h, y+\theta k)$$
$$+kf_y(x+\theta h, y+\theta k)$$
$$(0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する(図 26.1).

(2変数の平均値の定理)

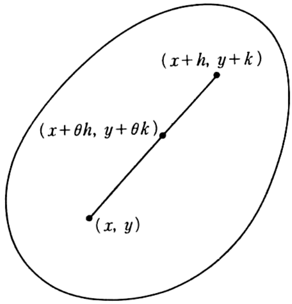


図 26.1

証明

(26.2) $$F(t)\equiv f(x+ht,\ y+kt) \qquad (0\leqq t\leqq 1)$$

とおく．1変数の平均値の定理によって，

(26.3) $$F(1)-F(0)=1\cdot F'(\theta) \qquad (0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在する．

一方，2変数合成関数の微分の公式 (25.6) (88ページ)によって，

(26.4)
$$F'(t)=f_x(x+ht,\ y+kt)\frac{d(x+ht)}{dt}+f_y(x+ht,\ y+kt)\frac{d(y+kt)}{dt}$$
$$=f_x(x+ht,\ y+kt)\cdot h+f_y(x+ht,\ y+kt)\cdot k.$$

(26.2)，(26.3)，(26.4)の3式から，(26.1)式がえられる． (証明終)

2. 2変数の平均値の定理の応用

定理 26.2 領域 D で $f_x(x, y)\equiv 0$，$f_y(x, y)\equiv 0$ ならば，D で
$$f(x, y)\equiv c \qquad (c \text{ は定数}).$$

証明 (a, b) を D の固定点，(x, y) を D の任意の点とする．そのとき，(a, b) と (x, y) は，有限個の線分(屈折線)で結べる (図 26.2).

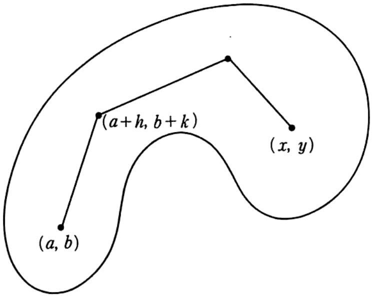


図 26.2

屈折線の最初の線分上で，2変数の平均値の定理を用いれば，定理の仮定によって，

$$f(a+h,\ b+k)-f(a,b)$$
$$=hf_x(a+\theta h,\ b+\theta k)+kf_y(a+\theta h,\ b+\theta k)=0 \qquad (0<\theta<1).$$
$$\therefore \qquad f(a+h,\ b+k)=f(a,b).$$

以下，順次に，同様の操作を有限回（屈折線の線分の数）行うことによって，

$$f(x,y)=f(a,b)$$

がえられる．　　(証明終)

＊問 1.　領域 D で $f_x(x,y)\equiv g_x(x,y)$, $f_y(x,y)\equiv g_y(x,y)$ ならば，D で，

$$f(x,y)\equiv g(x,y)+c \qquad (c \text{ は定数})$$

であることを証明せよ．

問 2.　定理 26.1 を利用して，つぎの（1），（2）を証明せよ：

（1）　領域 D で $f_x(x,y)\equiv a$, $f_y(x,y)\equiv b$（a, b は定数）ならば，

$$f(x,y)\equiv ax+by+c \qquad (c \text{ は定数}).$$

（2）　領域 D で $f_x(x,y)\equiv ay+b$, $f_y(x,y)\equiv ax+c$（a, b, c は定数）ならば，

$$f(x,y)\equiv axy+bx+cy+d \qquad (d \text{ は定数}).$$

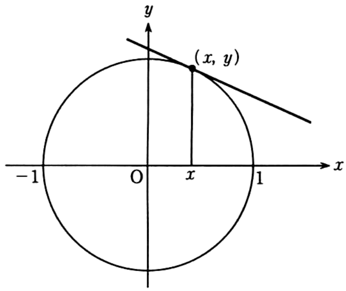
§27. 陰 関 数

1. 具 体 例　円:

(27.1)　　$x^2+y^2=1$　　(図 27.1)

上の点(x, y)における微分係数 $\dfrac{dy}{dx}$ を求めるには，(27.1)式を y について解いた関数を微分する直接的な方法もあるが，つぎのようにするのが簡単である:

(27.1)式において，y を x の関数と考えて，両辺を x について微分すれば，合成関数の微分の公式 (12 ページ)によって，



$x^2+y^2=1$

図 27.1

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0.$$

この方程式を $\dfrac{dy}{dx}$ について解けば，求める微分係数がえられる:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{2y}=-\frac{x}{y} \qquad (y\neq 0).$$

2. 微 分 係 数　1項で述べた方法を一般化しよう．

関数 $y=y(x)$ が，

(27.2)　　$f(x, y(x))\equiv 0$

をみたすとき，$y(x)$を方程式:

$$f(x, y)=0$$

の**陰関数**という．

定理 27.1　$f(x, y)$ が全微分可能，方程式:

$$f(x, y)=0$$

の陰関数 $y=y(x)$が微分可能で，$f_y(x, y(x))\neq 0$ ならば，

(27.3)　　$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}.$$　　**(陰関数の微分の公式)**

証明　方程式 (27.2)の両辺を微分すれば，2変数合成関数の微分の公式 (25.7)(88 ページ)によって，

$$f_x\frac{dx}{dx}+f_y\frac{dy}{dx}=f_x+f_y\frac{dy}{dx}=0.$$

したがって，$f_y \neq 0$ ならば，(27.3)式がえられる．　(証明終)

3. 接線の方程式

方程式:

$$f(x, y)=0$$

によって定義される曲線上の点 (a, b) における接線の方程式を求めよう．公式(3.3)(8ページ) によって，接線の方程式は，

(27.4)
$$y-b=\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a, y=b}(x-a).$$

ここで，陰関数の微分の公式 (27.3) によって，

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a, y=b}=-\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}.$$

これを(27.4)式に代入すれば，

$$y-b=-\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}(x-a).$$

したがって，接線の方程式は，

(27.5)
$$f_x(a, b)(x-a)+f_y(a, b)(y-b)=0.$$

(陰関数の接線の方程式)

例 1. $f(x, y)=x^2+y^2-1=0.$

$$f_x=2x, \qquad f_y=2y$$

であるから，接線の方程式は，(27.5)式によって，

$$2a(x-a)+2b(y-b)$$
$$=2\{ax+by-(a^2+b^2)\}=0.$$
$$a^2+b^2=1$$

に注意すれば，

$$ax+by=1 \qquad (図 27.2).$$

(例1終)

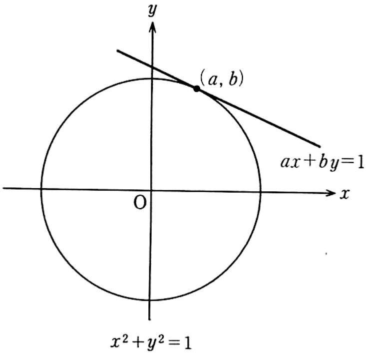


図 27.2

4. 極　　値

定理 27.2　$f(x, y)$ が全微分可能で，$f_y(a, b) \neq 0$ のとき，方程式:

(27.6)　$$f(x, y)=0$$

の陰関数 $y=y(x)$ が微分可能ならば，$y=y(x)$ が，$x=a$ で極値 $b=y(a)$ をとるための必要条件は，

(27.7)　$$f(a, b)=0, \qquad f_x(a, b)=0.$$

(陰関数の極値であるための必要条件)

証明　定理 27.1 によって，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}.$$

ゆえに，極値であるための必要条件 (定理 20.2(67 ページ))によって，$f_y(a, b) \neq 0$ のとき，

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a, y=b}=-\frac{f_x(a, b)}{f_y(a, b)}=0.$$

したがって，(27.7)式の第 2 式がえられる．(27.7)式の第 1 式は，$y=y(x)$ が方程式 (27.6) の陰関数であることから，明らかである．　(証明終)

例 2.　円:

(27.8)　$f(x, y) \equiv x^2+y^2-1=0.$

の陰関数の極値を求めよう:

(27.9)　$f_x(x, y)=2x=0,$

(27.10)　$f_y(x, y)=2y.$

(27.8)式と(27.9)式を連立させて解けば，

$$(x, y)=(0, 1), \qquad (x, y)=(0, -1).$$

このとき，$f_y=\pm 2 \neq 0$ であるから，これらが方程式 (27.8) の陰関数 $y=y(x)$ の極値の候補点である(図 27.3).

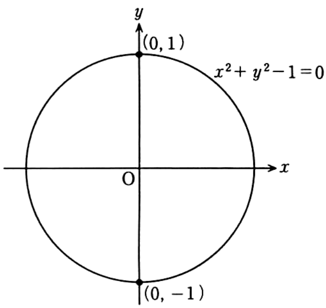


図 27.3

y を x の関数とみなして，(27.8)式の両辺を x について微分すれば，

$$2x+2yy'=0.$$

$$\therefore \quad x+yy'=0.$$

さらに，この両辺を x について微分すれば，

$$1+y'^2+yy''=0.$$

$$\therefore \quad y''=-\frac{1+y'^2}{y} \qquad (y \neq 0).$$

$y(x)$ が極値をとる点では，$y'=0$ であるから，その点では，この式から，

$$y''=-\frac{1}{y}.$$

点 $(0,1)$ では，$y''=-1<0$. ゆえに，定理 20.4 (69 ページ) によって，

$x=0$ で，極大値 $y=1$ をとる（図 27.3).

さらに，点 $(0,-1)$ では，$y''=1>0$. ゆえに，定理 20.4 によって，

$x=0$ で，極小値 $y=-1$ をとる（図 27.3). （例 2 終）

問 1. つぎの方程式の陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$ を求めよ:

(1) $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ （a, b, c は定数).

(2) $x^3-3xy+y^3=0.$ (3) $xe^y-y\cos x=0.$

(4) $\log\sqrt{x^2+y^2}-\tan^{-1}\dfrac{y}{x}=0.$

問 2. 陰関数の接線の方程式 (27.5) を利用して，つぎの方程式によって定義される曲線上の点 (a, b) における接線の方程式を求めよ:

(1) $y^2-x=0.$ (2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0.$

(3) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}-1=0.$

問 3. つぎの方程式の陰関数について，$\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ を求めよ:

(1) $y^2-4x=0.$ (2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-1=0.$

*(3) $x^2-xy+y^2-1=0.$

問 4. 例 2 にならって，つぎの方程式の陰関数 $y=y(x)$ の極値を求めよ:

(1) $\dfrac{x^2}{4}+y^2-1=0.$ *(2) $x^2-xy+y^2-1=0.$

8

2変数のテイラーの定理

§28. テイラーの定理

1. 偏微分演算子　$z=f(x,y)$ において,

$$x=a+ht, \quad y=b+kt \qquad (a, b, h, k \text{ は定数})$$

である場合, $z=F(t)\equiv f(a+ht,\ b+kt)$ とおけば, 2変数合成関数の微分の公式(25.7)(88ページ)によって,

$$\frac{dz}{dt}=\frac{dF}{dt}=D_x z\frac{dx}{dt}+D_y z\frac{dy}{dt}=h\,D_x z+k\,D_y z. \tag{28.1}$$

ここで, **偏微分演算子**:

$$hD_x+kD_y$$

を導入すれば, (28.1)式は,

$$\frac{dz}{dt}=(hD_x+kD_y)z \tag{28.2}$$

と書ける.

(28.1)式を, さらに t について微分すれば, (28.2)式によって,

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)&=\frac{d}{dt}\{(hD_x+kD_y)z\}\\ &=(hD_x+kD_y)\{(hD_x+kD_y)z\}\\ &=(h^2D_{xx}+2hkD_{xy}+k^2D_{yy})z\\ &=(hD_x+kD_y)^2z.\end{aligned} \tag{28.3}$$

ゆえに,

$$\frac{d^2z}{dt^2}=(hD_x+kD_y)^2z=(h^2D_{xx}+2hkD_{xy}+k^2D_{yy})z \tag{28.4}$$

と書ける．

以下同様にして，一般に，

$$\text{(28.5)}\quad \frac{d^n z}{dt^n}=\frac{d^n F}{dt^n}=(hD_x+kD_y)^n z$$
$$=\binom{n}{0}h^n {D_x}^n z+\binom{n}{1}h^{n-1}k{D_x}^{n-1}D_y z$$
$$+\binom{n}{2}h^{n-2}k^2{D_x}^{n-2}{D_y}^2 z$$
$$+\cdots+\binom{n}{n-1}hk^{n-1}D_x{D_y}^{n-1}z+\binom{n}{n}k^n{D_y}^n z$$
$$(n=1, 2, \cdots)$$

と書ける；ここで，

$$ {D_x}^{n-i}{D_y}^i z=\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i}\partial y^i}\qquad (i=0, \cdots, n;\ {D_x}^0 z={D_y}^0 z=z).$$

2．2変数のテイラーの定理

定理 28.1　$f(x, y)$が，点(x, y)と点$(x+h,\ y+k)$を結ぶ線分をふくむ領域で，連続なn階偏導関数をもてば，

$$f(x+h,\ y+k)=f(x, y)+(hD_x+kD_y)f(x, y)$$
$$+\frac{1}{2!}(hD_x+kD_y)^2 f(x, y)+\cdots$$
$$\text{(28.6)}\qquad +\frac{1}{(n-1)!}(hD_x+kD_y)^{n-1}f(x, y)$$
$$+\frac{1}{n!}(hD_x+kD_y)^n f(x+\theta h,\ y+\theta k)$$
$$(0<\theta<1)$$

をみたすθが存在する；ここで，

$$(hD_x+kD_y)^i=\binom{i}{0}h^i{D_x}^i+\binom{i}{1}h^{i-1}k{D_x}^{i-1}D_y+\binom{i}{2}h^{i-2}k^2{D_x}^{i-2}{D_y}^2$$
$$+\cdots+\binom{i}{i-1}hk^{i-1}D_x{D_y}^{i-1}+\binom{i}{i}k^i{D_y}^i\qquad (i=1, \cdots, n).$$

（2変数のテイラーの定理）

証明　　$F(t)\equiv f(x+ht,\ y+kt)\qquad (0\leqq t\leqq 1)$

とおけば，$F(t)$は連続なn階導関数をもつから，1変数のマクローリンの定理(16.10)(56ページ)によって，

(28．7) $F(t)=F(0)+F'(0)t+\dfrac{F''(0)}{2!}t^2+\cdots+\dfrac{F^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}+\dfrac{F^{(n)}(\theta t)}{n!}t^n$
$(0<\theta<1)$

をみたす θ が存在する．ここで，(28.5)式によって，

$$F^{(i)}(t)=(hD_x+kD_y)^i f(x+ht,\ y+kt)\quad (i=0,1,\cdots,n).$$

したがって，(28.7)式において $t=1$ とおけば，(28.6)式がえられる．

(証明終)

2変数のテイラーの定理(28.6)において，$x=u$，$y=v$；$h=x$，$k=y$ とおいてから，$u=0$，$v=0$ とおけば，つぎの2変数のマクローリンの定理がえられる：

$$\begin{aligned} f(x,y)=&f(0,0)+(xD_u+yD_v)f(0,0)+\frac{1}{2!}(xD_u+yD_v)^2 f(0,0)\\ &+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}(xD_u+yD_v)^{n-1}f(0,0)\\ &+\frac{1}{n!}(xD_u+yD_v)^n f(\theta x,\theta y)\qquad (0<\theta<1);\end{aligned}\tag{28.8}$$

ここで，

$$(xD_u+yD_v)^i f(0,0)=[(xD_u+yD_v)^i f(u,v)]_{u=0,v=0},\quad \text{etc.}$$

(2変数のマクローリンの定理)

例 1. $z=e^x\cos y$.

$$D_xz=e^x\cos y,\qquad D_yz=-e^x\sin y,$$
$$D_{xx}z=e^x\cos y,\qquad D_{xy}z=-e^x\sin y,\qquad D_{yy}=-e^x\cos y.$$

ゆえに，2変数のマクローリンの定理（$n=2$ の場合）によって，

$$\begin{aligned} e^x\cos y=&e^0\cos 0+\{xe^0\cos 0+y(-e^0\sin 0)\}\\ &+\frac{1}{2!}\{x^2e^{\theta x}\cos\theta y+2xy(-e^{\theta x}\sin\theta y)+y^2(-e^{\theta x}\cos\theta y)\}\\ =&1+x+\frac{e^{\theta x}}{2}\{(x^2-y^2)\cos\theta y-2xy\sin\theta y\}\qquad (0<\theta<1)\end{aligned}$$

をみたす θ が存在する． (例1終)

例 2. $z=f(x,y)=\dfrac{4}{3}\pi xy^2$

(回転だ円体の体積（§ 43 の問 1 の (2) (155 ページ)参照))．

$$D_xz=\frac{4}{3}\pi y^2,\qquad D_yz=\frac{8}{3}\pi xy,$$

$$D_{xx}z=0,\qquad D_{xy}z=\frac{8}{3}\pi y,\qquad D_{yy}z=\frac{8}{3}\pi x.$$

ゆえに，2変数のテイラーの定理($n=2$)によって，

$$\begin{aligned}\varDelta z&\equiv f(x+h,\ y+k)-f(x,\ y)\\&=\left(h\cdot\frac{4}{3}\pi y^2+k\cdot\frac{8}{3}\pi xy\right)+\frac{1}{2!}\left\{h^2\cdot 0+2hk\cdot\frac{8}{3}\pi(y+\theta k)\right.\\&\qquad\qquad\left.+k^2\cdot\frac{8}{3}\pi(x+\theta h)\right\}\\&=\frac{4}{3}\pi xy^2\left\{\left(\frac{h}{x}+2\cdot\frac{k}{y}\right)+\left(\frac{2hk(y+\theta k)}{xy^2}+\frac{k^2(x+\theta h)}{xy^2}\right)\right\}\qquad(0<\theta<1)\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad\frac{\varDelta z}{z}-\left(\frac{h}{x}+2\cdot\frac{k}{y}\right)=2\cdot\frac{h}{x}\cdot\frac{k}{y}\left(1+\theta\frac{k}{y}\right)+\left(\frac{k}{y}\right)^2\left(1+\theta\frac{h}{x}\right).$$

最後の等式は，z の相対誤差 $\dfrac{\varDelta z}{z}$ として，

$$\frac{h}{x}+2\cdot\frac{k}{y}$$

を採用したときの誤差が，右辺の式であたえられることを示している．

(例2終)

問 1. 例1にならって，つぎの関数に2変数のマクローリンの定理($n=2$ の場合)を適用せよ:

(1) $z=x^2+2xy+3y^2$.　(2) $z=x^3-3xy+y^3$.

(3) $z=e^x\sin y$.　(4) $z=\sin x\cos y$.

(5) $z=\dfrac{y}{1+x+y}$.　(6) $z=\sqrt{1+x^2-y^2}$.

(7) $z=\log\sqrt{(1+x)^2+y^2}$.　(8) $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{1+x}$.

問 2. 例2にならって，つぎの関数に2変数のテイラーの定理($n=2$ の場合)を適用せよ:

(1) $z=\pi xy$.　(2) $z=x^2+2xy+3y^2$.

(3) $z=x^3-3xy+y^3$.　(4) $z=e^x\sin y$.

(5) $z=\sin x\cos y$.　(6) $z=\dfrac{x}{x-y}$.

§29. テイラー展開

1. マクローリン級数 $f(x, y)$が点$(0, 0)$のまわりで，何回でも偏微分可能であると仮定する．2変数のマクローリンの定理(28.8)(99ページ)において，極限関係：

(29.1)
$$\frac{1}{n!}(xD_u+yD_v)^n f(\theta x, \theta y) \to 0 \qquad (n\to\infty)$$

(2変数のマクローリン展開可能の条件)

がみたされれば，$f(x, y)$は点$(0, 0)$のまわりで，つぎのように，2変数のマクローリン級数に展開できる：

(29.2)
$$f(x, y)=f(0, 0)+(xD_u+yD_v)f(0, 0)+\frac{1}{2!}(xD_u+yD_v)^2 f(0, 0)+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(xD_u+yD_v)^n f(0, 0);$$

ここで，
$$(xD_u+yD_v)^i f(0, 0)=[(xD_u+yD_v)^i f(u, v)]_{u=0,v=0}, \quad \text{etc.}$$

(2変数のマクローリン級数)

例.
$$f(x, y)=e^x\cos y$$
のマクローリン展開を，x，yについて3次の項まで求めよう．

$$D_x f=e^x\cos y, \qquad D_y f=e^x(\cos y)';$$
$$D_{xx}f=e^x\cos y, \qquad D_{xy}f=e^x(\cos y)', \qquad D_{yy}f=e^x(\cos y)'';$$
$$D_{xxx}f=e^x\cos y, \qquad D_{xxy}f=e^x(\cos y)', \qquad D_{xyy}f=e^x(\cos y)'',$$
$$D_{yyy}f=e^x(\cos y)'''.$$
$$(\cos y)'=-\sin y, \qquad (\cos y)''=-\cos y, \qquad (\cos y)'''=\sin y$$

であるから，

$$D_x f(0, 0)=1, \qquad D_y f(0, 0)=0;$$
$$D_{xx}f(0, 0)=1, \qquad D_{xy}f(0, 0)=0, \qquad D_{yy}f(0, 0)=-1;$$
$$D_{xxx}f(0, 0)=1, \qquad D_{xxy}f(0, 0)=0, \qquad D_{xyy}f(0, 0)=-1, \qquad D_{yyy}f(0, 0)=0.$$

ゆえに，(29.2)式によって，

$$e^x \cos y = 1 + (x\cdot 1 + y\cdot 0) + \frac{1}{2!}\{x^2\cdot 1 + 2xy\cdot 0 + y^2\cdot(-1)\}$$
$$+\frac{1}{3!}\{x^3\cdot 1 + 3x^2y\cdot 0 + 3xy^2\cdot(-1) + y^3\cdot 0\} + \cdots$$
$$= 1 + x + \frac{x^2-y^2}{2} + \frac{x^3-3xy^2}{6} + \cdots.$$
（例終）

問． 例にならって，つぎの関数の2変数のマクローリン展開を，x，y について3次の項まで求めよ：

（1） $z=e^x \sin y$.　　（2） $z=e^{-x}\cos y$.

（3） $z=\sin x \cos y$.　　（4） $z=\cos x \sinh y$.

（5） $z=\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2}$.　　（6） $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{1+x}$.

§30．2変数関数の極値

1．極値をとるための必要条件　点 (a, b) に十分近い，(a, b) 以外のすべての (x, y) に対して，

$$f(x, y) > f(a, b) \qquad (f(x, y) < f(a, b))$$

がなりたつとき，

$f(x, y)$ は点 (a, b) で**極小値**（**極大値**）$f(a, b)$ をとる

という．

極小値と極大値を総称して，**極値**という．

> **定理 30.1**　$f(x, y)$ が (a, b) で偏微分可能で極値をとれば，
> $$f_x(a, b)=0, \qquad f_y(a, b)=0.$$
> （**極値をとるための必要条件**）

証明　$f(x, y)$ が (a, b) で極小値をとれば，a に十分近い，a 以外のすべての x に対して，

$$f(x, b) > f(a, b).$$

したがって，x の関数 $f(x, b)$ は $x=a$ で極小値をとる．そのとき，定理20.2（67ページ）によって，

$$f_x(a, b)=0.$$

同様にして，

$$f_y(a, b)=0.$$

$f(x, y)$ が (a, b) で極大値をとる場合も同様である． （証明終）

2． 極値をとるための十分条件

定理 30.2 $f(x, y)$ が (a, b) の近くで，連続な2階偏導関数をもち，

(30．1) $$f_x(a, b)=0, \qquad f_y(a, b)=0$$

とする．さらに，

$$D(x, y)\equiv f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y)-f_{xy}(x, y)^2$$

とおくとき，

（i） $D(a, b)>0$ の場合：

$f_{xx}(a, b)>0$ ならば，$f(x, y)$ は (a, b) で極小値をとる．

$f_{xx}(a, b)<0$ ならば，$f(x, y)$ は (a, b) で極大値をとる．

（極値をとるための十分条件）

（ii） $D(a, b)<0$ の場合：

$f(x, y)$ は (a, b) で極値をとらない．

証明 $n=2$ の場合の2変数のテイラーの定理（98ページ）によって，

(30．2)
$$\begin{aligned} &f(a+h, b+k)-f(a, b)\\ &=hf_x(a, b)+kf_y(a, b)+\frac{1}{2}\{h^2f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)\\ &\quad+2hkf_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)+k^2f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)\} \quad (0<\theta<1)\end{aligned}$$

をみたす θ が存在する．記号の簡単のために，

$$\tilde{f}_{xx}=f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k), \qquad \tilde{f}_{xy}=f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k),$$
$$\tilde{f}_{yy}=f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k),$$
$$\tilde{D}=D(a+\theta h, b+\theta k)$$

とおけば，仮定(30.1)と(30.2)式によって，

(30．3)
$$\begin{aligned} &2\tilde{f}_{xx}\{f(a+h, b+k)-f(a, b)\}\\ &=h^2\tilde{f}_{xx}{}^2+2hk\tilde{f}_{xx}\tilde{f}_{xy}+k^2\tilde{f}_{xx}\tilde{f}_{yy}\\ &=(h\tilde{f}_{xx}+k\tilde{f}_{xy})^2+k^2(\tilde{f}_{xx}\tilde{f}_{yy}-\tilde{f}_{xy}{}^2)\\ &=(h\tilde{f}_{xx}+k\tilde{f}_{xy})^2+k^2\tilde{D}.\end{aligned}$$

（i） $D(a, b)>0$ の場合：

定理の仮定によって，$f_{xx}(x, y)$，$f_{xy}(x, y)$，$f_{yy}(x, y)$ は，(a, b) の近くで連続であるから，$|h|$，$|k|$ が十分小さいとき，

$$f_{xx}(a, b) \quad \text{と} \quad \tilde{f}_{xx},$$
$$D(a, b) \quad \text{と} \quad \tilde{D}$$

は，それぞれ，同符号となる．したがって，仮定によって，$\tilde{D}>0$ であって，

$f_{xx}(a, b)>0$ ならば，$\tilde{D}>0$，$\tilde{f}_{xx}>0$ となって，(30.3)式によって，$f(x, y)$ は (a, b) で極小値をとり；

$f_{xx}(a, b)<0$ ならば，$\tilde{D}>0$，$\tilde{f}_{xx}<0$ となって，(30.3)式によって，$f(x, y)$ は (a, b) で極大値をとる．

（ii） $D(a, b)<0$ の場合†：

$f_{xx}(a, b)\neq 0$ のとき，(30.3)式によって，$h\neq 0$，$k=0$ に対して，

(30．4)　$$2\tilde{f}_{xx}\{f(a+h, b)-f(a, b)\}=h^2\tilde{f}_{xx}{}^2>0.$$

一方，h，k を，$|h|$，$|k|$ が十分小さくて，

$$hf_{xx}(a, b)+kf_{xy}(a, b)=0 \qquad (k\neq 0)$$

をみたすようにえらべば，$h\tilde{f}_{xx}+k\tilde{f}_{xy}$ も 0 に近く，また，$D(a, b)<0$ から $\tilde{D}<0$ であるから，(30.3)式によって，

(30．5)　$$\begin{aligned} 2\tilde{f}_{xx}\{f(a+h, b+k)-f(a, b)\} &= (h\tilde{f}_{xx}+k\tilde{f}_{xy})^2+k^2\tilde{D} \\ &= k^2\left\{\left(-\frac{f_{xy}(a, b)}{f_{xx}(a, b)}\tilde{f}_{xx}+\tilde{f}_{xy}\right)^2+\tilde{D}\right\}<0. \end{aligned}$$

(30.4)式と(30.5)式によって，$f(a+h, b+k)-f(a, b)$ は正にも負にもなるから，$f(x, y)$ は (a, b) で極値をとらない．

$f_{yy}(a, b)\neq 0$ のときも同様である．

$f_{xx}(a, b)=f_{yy}(a, b)=0$ のときは，

$$D=-f_{xy}(a, b)^2$$

であって，$h=\pm k$ とえらべば，(30.2)式によって，

$$2\{f(a\pm k, b+k)-f(a, b)\}=k^2(\tilde{f}_{xx}\pm 2\tilde{f}_{xy}+\tilde{f}_{yy}) \qquad (\text{複号同順}).$$

$|k|=|h|$ が十分小さいとき，この右辺は $\pm 2\tilde{f}_{xy}$ と同符号；すなわち，$f(a+k, b+k)-f(a, b)$ と $f(a-k, b+k)-f(a, b)$ は，たがいに，異符号である．ゆえに，このときも $f(x, y)$ は (a, b) で極値をとらない．　（証明終）

例 1.　$f(x, y)=\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}$.

$$f_x=\frac{2x}{9}=0, \ f_y=\frac{2y}{4}=0 \ \text{の解は，} (x, y)=(0, 0).$$

$$f_{xx}=\frac{2}{9}, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

† この場合の証明は省略して，先にすすんでもよい．

$$\therefore \quad D(x, y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}>0.$$

$f_{xx}=\dfrac{2}{9}>0$ であるから，定理 30.2 によって，

$f(x, y)$ は $(0, 0)$ で極小値 $f(0, 0)=0$ をとる．

さらに，定理 30.1 によって，これ以外に極値はない． （例 1 終）

例 2. $f(x, y)=\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}$.

$f_x=\dfrac{2x}{9}=0$, $f_y=-\dfrac{2y}{4}=0$ の解は，$(x, y)=(0, 0)$.

$$f_{xx}=\frac{2}{9}, \quad f_{xy}=0, \quad f_{yy}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad D(x, y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2=-\frac{2}{18}=-\frac{1}{9}<0.$$

したがって，定理 30.1 と定理 30.2 によって，

$f(x, y)$ は極値をとらない． （例 2 終）

例 3. $f(x, y)=x^3-3xy+y^3$.

$f_x=3x^2-3y=0, \quad f_y=-3x+3y^2=0.$

この連立方程式の解は（図 30.1），

$(x, y)=(0, 0), \quad (x, y)=(1, 1).$

$f_{xx}=6x, \quad f_{xy}=-3, \quad f_{yy}=6y.$

$\therefore \quad D(x, y)=f_{xx}f_{yy}-f_{xy}{}^2=36xy-9.$

$D(0, 0)=-9<0.$

ゆえに，$(0, 0)$ で $f(x, y)$ は極値をとらない．

$D(1, 1)=36-9=27>0.$

$f_{xx}(1, 1)=6>0.$

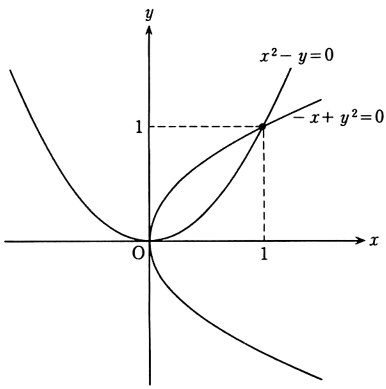


図 30.1

したがって，定理 30.2 によって，

$f(x, y)$ は $(1, 1)$ で，極小値: $f(1, 1)=1-3+1=-1$ をとる．

さらに，定理 30.1 によって，これ以外に極値はない． （例 3 終）

問 1. つぎの関数の極値を求めよ:

(1) $f(x, y)=\dfrac{x^2}{2}+y^2$. (2) $f(x, y)=\dfrac{x^2}{2}-y^2$.

(3) $f(x, y)=x^2+2xy+2y^2$. (4) $f(x, y)=x^2+2xy-2y^2$.

（5）　$f(x, y)=-x^2-2xy+y^2$.

（6）　$f(x, y)=-x^2+2xy-3y^2$.

（7）　$f(x, y)=x^2+2xy+2y^2-2x-2y+1$.

（8）　$f(x, y)=x^2-2xy-2y^2+x+2y+2$.

（9）　$f(x, y)=-x^2+2xy-3y^2+2x+2y+3$.

（10）　$f(x, y)=x^3-9xy+y^3$.

（11）　$f(x, y)=e^{-(2x^2+3y^2)}$.

＊問 2.　定理 30.1 と定理 30.2 を利用して，体積が一定である直方体のうちで，表面積が最小であるものを求めよ．

§ 31．条件つき極値問題

1．ラグランジュの乗数法　$f(x, y)$，$g(x, y)$ は，連続な偏導関数をもつと仮定する．そのとき，条件:

(31．1)　　$g(x, y)=0$

のもとでの，$f(x, y)$ の極値を求める**条件つき極値問題**を考える．

この問題を幾何学的に解釈すれば，方程式 (31.1)の陰関数 $y=y(x)$ によって定義される xy-平面上の曲線 C 上で，$f(x, y)$ の極値を求める問題とみることができる(図 31.1)．

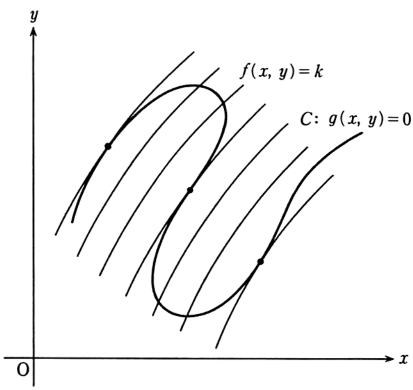


図 31.1

条件 (31.1)によって定まる陰関数 $y=y(x)$ を，(31.1)式に代入した方程式 $g(x, y(x))=0$ の両辺を x に関して微分すれば，2 変数合成関数の微分の公式 (25.7) (88 ページ) によって，

(31．2)　$$g_x(x, y(x))+g_y(x, y(x))\frac{dy}{dx}=0.$$

$f(x, y)$ が曲線 C 上の点 (a, b) ($g(a, b)=0$; $b=y(a)$) で極値をとると仮定すれば，$F(x)\equiv f(x, y(x))$ が $x=a$ で極値をとるための必要条件(67 ページ) によって，

(31．3)　$$F'(a)=f_x(a, b)+f_y(a, b)\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a,y=b}=0.$$

いま，$g_y(a, b)\neq 0$ と仮定すれば，(31.2)式から，

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a,y=b}=-\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}.$$

これを(31.3)式に代入すれば，

(31.4)
$$f_x(a,b)-f_y(a,b)\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}=0.$$

$$\therefore\quad \frac{f_x(a,b)}{g_x(a,b)}=\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}.$$

したがって，この両辺に共通の値を $-\lambda$ とおけば，

$$f_x(a,b)+\lambda g_x(a,b)=0,\qquad f_y(a,b)+\lambda g_y(a,b)=0.$$

以上のことから，つぎの定理がえられる:

定理 31.1　$f(x,y)$, $g(x,y)$ は，連続な偏導関数をもつと仮定する．

条件:
$$g(x,y)=0$$

のもとで，$f(x,y)$ が (a,b) で極値をとれば，$g_y(a,b)\neq 0$ であるかぎり，

(31.5)
$$\begin{cases} f_x(a,b)+\lambda g_x(a,b)=0, \\ f_y(a,b)+\lambda g_y(a,b)=0 \end{cases}$$

をみたす λ が存在する．λ を**ラグランジュの乗数**という．

(**ラグランジュの乗数法**)

例.　$x^2+y^2=1$ のもとで，xy の極値を求めよう．

(31.6)
$$g(x,y)=x^2+y^2-1=0,$$

(31.7)
$$f(x,y)=xy$$

とおけば，

$$f_x=y,\qquad f_y=x,\qquad g_x=2x,\qquad g_y=2y.$$

これらから，(31.5)式をつくれば，

(31.8)
$$b+\lambda\cdot 2a=0,$$

(31.9)
$$a+\lambda\cdot 2b=0.$$

これらと(31.6)式に，$x=a$, $y=b$ を代入した式:

(31.10)
$$g(a,b)=a^2+b^2-1=0$$

から，a, b, λ を求める．まず，(31.8)式，(31.9)式のそれぞれを b について解けば，

(31.11)
$$b=-2\lambda a,\qquad b=-\frac{1}{2\lambda}a.$$

$$\therefore\quad 2\lambda=\frac{1}{2\lambda},\quad \lambda^2=\frac{1}{4},\quad \lambda=\pm\frac{1}{2}.$$

これを(31.11)式に代入すれば，

(31. 12) $$b=\mp a.$$

さらに，これを(31.10)式に代入すれば，

$$2a^2-1=0. \qquad \therefore \qquad a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

これと(31.12)式から，つぎの (a, b) の 4 組がえられる：

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

これらが，極値をとる点の候補点である．

実際に，これらの点で $f(x, y)=xy$ が極値をとることは，図 31.2 から直接確かめられて，つぎの結果がえられる：

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極大値（最大値） $\frac{1}{2}$,

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で極小値（最小値） $-\frac{1}{2}$ をとる．

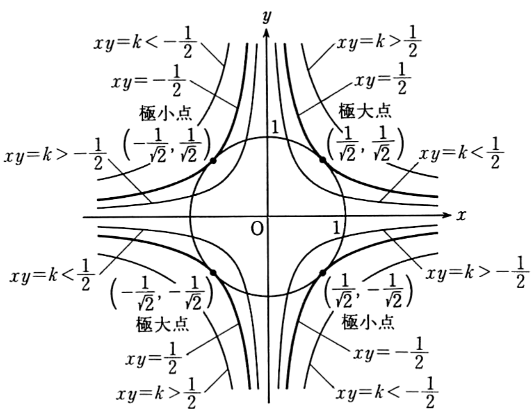


図 31.2 （例終）

問 1. 例にならって，$xy=1$ のもとで，x^2+y^2 の極値を求めよ．

問 2. 例にならって，$x^2+y^2=1$ のもとで，つぎの $f(x, y)$ が極値をとる候補点を求めよ：

（1） $f(x, y)=4x^2+4xy+y^2$.

（2） $f(x, y)=2x^2-2\sqrt{2}xy+y^2$.

（3） $f(x, y)=3x^2+2\sqrt{2}xy+2y^2$.

（4） $f(x, y)=3x^2+2\sqrt{3}xy+y^2$.

9

不 定 積 分

§ 32. 不 定 積 分

1. 原始関数と不定積分　関数 $f(x)$ があたえられたとき，

$$F'(x)=f(x)$$

となるような関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という．

$F(x)$ が $f(x)$ の原始関数で，C が定数のとき，

$$G(x)=F(x)+C$$

も $f(x)$ の原始関数になる．

逆に，つぎの定理がなりたつ：

> **定理 32.1**　$F(x)$, $G(x)$ が，ともに $f(x)$ の原始関数ならば，
>
> $$G(x)=F(x)+C \qquad (C \text{ は定数}).$$

証明　$F(x)$, $G(x)$ が，ともに，$f(x)$ の原始関数であるから，

$$\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0.$$

そのとき，定理 14.2 (48 ページ) によって，

$$G(x)-F(x)\equiv C. \qquad \text{(証明終)}$$

この定理によって，$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の 1 つとすれば，任意の原始関数は，$F(x)+C$ の形に書ける．これを $f(x)$ の**不定積分**といい，

$$\int f(x)\,dx$$

で表す．したがって，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C \qquad (C \text{ は任意定数}). \tag{32. 1}$$

不定積分の定義から，ただちに，つぎの定理がえられる:

定理 32.2

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx=f(x), \tag{32.2}$$

$$\int\frac{dF(x)}{dx}\,dx=F(x)+C. \tag{32.3}$$

$f(x)$ の不定積分を求めることを，$f(x)$ を**積分する**といい，(32.1)式の C を**積分定数**とよぶ.

2. 初等関数の積分 定理 32.2 によって，積分することは微分することの逆演算である．そこで，初等関数の微分の公式を利用して，初等関数の不定積分を求めることができる.

重要な初等関数の積分の公式をあげておこう．カッコ内は，その微分の公式が現れたページを示し，C は積分定数を表す.

$(x^{\alpha+1})'=(\alpha+1)x^{\alpha}$	(16, 29 ページ). ⇒	$\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ (α は実数で $\alpha\neq-1$).
$(e^x)'=e^x$	(26 ページ). ⇒	$\displaystyle\int e^x\,dx=e^x+C.$
$(a^x)'=a^x\log a$	(29 ページ). ⇒	$\displaystyle\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\log a}+C$ ($a>0,\ a\neq1$).
$(\log\lvert x\rvert)'=\dfrac{1}{x}$	(26 ページ). ⇒	$\displaystyle\int\frac{1}{x}\,dx=\log\lvert x\rvert+C.$
$(\cos x)'=-\sin x$	(22 ページ). ⇒	$\displaystyle\int\sin x\,dx=-\cos x+C.$
$(\sin x)'=\cos x$	(21 ページ). ⇒	$\displaystyle\int\cos x\,dx=\sin x+C.$
$(\tan x)'=\sec^2 x$	(22 ページ). ⇒	$\displaystyle\int\sec^2 x\,dx=\tan x+C.$
$(\cot x)'=-\mathrm{cosec}^2 x$	(22 ページ). ⇒	$\displaystyle\int\mathrm{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+C.$
$(\sin^{-1}x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(33 ページ). ⇒	$\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\sin^{-1}x+C.$

導関数	参照		積分公式
$(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	(35ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \tan^{-1} x + C.$
$(\cosh x)' = \sinh x$	(31ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \sinh x\,dx = \cosh x + C.$
$(\sinh x)' = \cosh x$	(31ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \cosh x\,dx = \sinh x + C.$
$(\tanh x)' = \mathrm{sech}^2\, x$	(31ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \mathrm{sech}^2\, x\,dx = \tanh x + C.$
$(\coth x)' = -\mathrm{cosech}^2\, x$	(32ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \mathrm{cosech}^2\, x\,dx = -\coth x + C.$
$\left(\dfrac{1}{2}\log\left\|\dfrac{x-1}{x+1}\right\|\right)' = \dfrac{1}{x^2-1}$	(27ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \frac{1}{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\log\left\|\frac{x-1}{x+1}\right\| + C.$
$(\log\|x+\sqrt{x^2+a}\|)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	(27ページ).	$\Rightarrow$	$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \log\|x+\sqrt{x^2+a}\| + C.$

この項であげた初等関数の積分の公式は，今後，いちいち，ことわらないで利用するので，暗記されたい．

3. 積分法の公式　まず，つぎの基本公式がなりたつ：

> **定理 32.3**
>
> (i) $\displaystyle\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$　　(c は定数で $c \neq 0$),
>
> (ii) $\displaystyle\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$　　(複号同順).
>
> **(不定積分の基本公式)**

証明　(32.3)式と定理4.1の (i), (ii) (11ページ)によって，簡単に示される．　(証明終)

対数微分の公式(7.12)(26ページ)による，

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

から，つぎの積分公式がえられる：

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C \qquad (f(x) \neq 0). \tag{32.4}$$

例 1. $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x}\,dx$

$= -\log|\cos x| + C.$

$$(32.5)\qquad \therefore \quad \int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + C.$$

(例 1 終)

例 2. $\int \cot x\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x}\,dx$

$= \log|\sin x| + C.$

$$(32.6)\qquad \therefore \quad \int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C.$$

(例 2 終)

問. つぎの不定積分を求めよ:

(1) $\int (x^3 - 2x)\,dx.$ (2) $\int \frac{1+x}{x^3}\,dx.$

(3) $\int \sqrt{x^3}\,dx.$ (4) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}.$

(5) $\int \sqrt[3]{1+x}\,dx.$ (6) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx.$

(7) $\int \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{1+x}}\,dx.$ (8) $\int e^{-2x+3}\,dx.$

(9) $\int (e^x + e^{-x})^2\,dx.$ (10) $\int 3^x\,dx.$

(11) $\int 2^{2x+1}\,dx.$ (12) $\int \frac{x}{x-4}\,dx.$

(13) $\int \cos(x+1)\,dx.$ (14) $\int \sin 2x\,dx.$

(15) $\int \cos^2 x\,dx.$ (16) $\int \sin^2 x\,dx.$

(17) $\int \sin 2x \cos x\,dx.$ (18) $\int (\sin x + \cos x)^2\,dx.$

(19) $\int \sec^2 \frac{x}{2}\,dx.$ (20) $\int \tan^2 x\,dx$

(21) $\int \frac{1}{\sqrt{2x - x^2}}\,dx.$ (22) $\int \frac{1}{x^2 - 2x + 2}\,dx.$

(23) $\int \cosh(2x+1)\,dx$.　　(24) $\int \frac{1}{x^2+4x+3}\,dx$.

(25) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

§ 33．置換積分法

1．置換積分法

定理 33.1　$x=\varphi(t)$ が微分可能ならば，

(33.1)　$$\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt=\int f(x)\frac{dx}{dt}\,dt.$$

（置換積分法）

証明　$f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とおけば，

(33.2)　$$F'(x)=f(x).$$

合成関数の微分の公式 (12 ページ) によって，

(33.3)　$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt}=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

ゆえに，$F(x)=F(\varphi(t))$ は，$f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数の 1 つである．(33.2)式と (33.3)式によって，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C=F(\varphi(t))+C=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

（証明終）

置換積分法は，つぎのような形でもよく使われる：

あたえられた不定積分が，

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx$$

の形に書けるとき，

$$u=\varphi(x)$$

とおけば，置換積分法(33.1)によって，

(33.4)　$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(u)\frac{du}{dx}\,dx=\int f(u)\,du.$$

（置換積分法）

2. 応用例

例 1. $a>0$ のとき,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} \cdot \frac{1}{a}\,dx = *.$$

ここで, $u=\frac{x}{a}$ とおけば,

$$du = \frac{1}{a}\,dx \tag{33.5}$$

であるから, 置換積分法(33.4)によって,

$$* = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a>0). \tag{33.6}$$

(例 1 終)

なお, 置換積分法においては, (33.5)式のように, 一般に, $\frac{du}{dx}=\varphi'(x)$ を $du=\varphi'(x)\,dx$ の形の式に表して計算した方が, 間違いが少なくて便利である.

例 2. $a\neq 0$ のとき,

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \cdot \frac{1}{a}\,dx = *.$$

ここで, $u=\frac{x}{a}$ とおけば, $du=\frac{1}{a}dx$ であるから, 置換積分法(33.4)によって,

$$* = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1} u + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C.$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C \qquad (a\neq 0). \tag{33.7}$$

(例 2 終)

例 3. 例 2 とまったく同様にして, つぎの公式がえられる:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \qquad (a\neq 0). \tag{33.8}$$

(例 3 終)

例 4. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0).$

x のかわりうる範囲が $-a\leqq x\leqq a$ であることに注意すれば，$x=a\sin t$ とおき，t のかわる範囲を $-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ としてよい．そのとき，$dx=a\cos t\,dt$．ゆえに，置換積分法(33.1)によって，

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,dt$$
$$=a^2\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt=*.$$

ここで，$-\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲では，$\cos t\geqq 0$ となるから，

$$\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=\cos t.$$

したがって，$\int\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}\sin 2t+C$ であることに注意すれば，

$$*=a^2\int\cos^2 t\,dt=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$
$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$$
$$=\frac{a^2}{2}(t+\sin t\sqrt{1-\sin^2 t})+C=\frac{a^2}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C$$
$$=\frac{1}{2}\left(a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C.$$

(33．9) $\quad\therefore\quad \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+C$ $\qquad (a>0).$

(例 4 終)

問 1. つぎの不定積分を求めよ:

(1) $\int(2x-3)^4\,dx.$ (2) $\int x^2(x^3+1)^4\,dx.$

(3) $\int\frac{dx}{(3x+1)^2}.$ (4) $\int\frac{dx}{x^2-2}.$

(5) $\int\frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx.$ *(6) $\int\frac{1}{x^2+x+1}\,dx.$

(7) $\int\frac{x}{x^4+1}\,dx.$ (8) $\int\sqrt{2x+3}\,dx.$

(9) $\displaystyle\int\frac{6x^2}{\sqrt{2x^3-5}}\,dx.$　　　＊(10) $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx.$

(11) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}\,dx.$　　　(12) $\displaystyle\int\sin^2 x\cos x\,dx.$

(13) $\displaystyle\int\cos^3 x\,dx.$　　　(14) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx.$

(15) $\displaystyle\int\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx.$　　　(16) $\displaystyle\int xe^{x^2}\,dx.$

(17) $\displaystyle\int(e^x+1)^2e^x\,dx.$　　　(18) $\displaystyle\int\frac{1}{e^x+1}\,dx.$

(19) $\displaystyle\int\tanh x\,dx.$　　　(20) $\displaystyle\int\frac{\log x}{x}\,dx.$

問 2. (1) $x=a\sinh t$ とおいて，例 4 にならって，つぎの公式をみちびけ:

$$\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(a^2\sinh^{-1}\frac{x}{a}+x\sqrt{x^2+a^2}\right)+C\qquad(a>0).$$

ここで，$t=\sinh^{-1}u$ は，$u=\sinh t$ の逆関数である．

(2) (9.1)式 (30 ページ)を利用して，つぎの関係式を証明せよ:

$$\sinh^{-1}u=\log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right).$$

§ 34. 部分積分法

1. 部分積分法　　積の微分の公式:

$$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

から，

$$f(x)g'(x)=\{f(x)g(x)\}'-f'(x)g(x).$$

この両辺を積分すれば，(32.3)式 (110 ページ)によって，

$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)+C-\int f'(x)g(x)\,dx.$$

ここで，右辺の積分定数 C は，第 2 項の不定積分にふくめてしまってよいから，つぎの定理がえられる:

定理 34.1　$f(x)$, $g(x)$ が，ともに，微分可能ならば，

(34.1)
$$\int f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)\,dx.$$

(部分積分法)

2．応用例

例 1. $\int x \sin x \, dx$.

$f(x)=x$, $g'(x)=\sin x$ とおけば,

$$f'(x)=1, \qquad g(x)=-\cos x$$

であるから，部分積分法によって，

$$\int x \sin x \, dx = x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + C.$$

（例 1 終）

例 2. $\int x^2 \sin x \, dx$.

部分積分法の公式で，$f(x)=x^2$, $g'(x)=\sin x$ とおけば,

$$f'(x)=2x, \qquad g(x)=-\cos x$$

であるから，部分積分法によって，

$$\int x^2 \sin x \, dx = x^2(-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x)\, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x \, dx = *.$$

ここで，例 1 と同様な方法で，

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx$$

$$= x \sin x + \cos x + C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

$$\therefore \qquad * = -x^2 \cos x + 2(x \sin x + \cos x + C_1)$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + 2C_1.$$

$$\therefore \qquad \int x^2 \sin x \, dx = 2x \sin x + (2-x^2)\cos x + C \qquad (C=2C_1).$$

（例 2 終）

例 3. $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx \qquad (a>0)$.

$$I = \int \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int 1 \cdot \sqrt{a^2-x^2}\, dx = *.$$

ここで，$f(x)=\sqrt{a^2-x^2}$, $g'(x)=1$ とおけば,

$$f'(x)=\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}, \qquad g(x)=x$$

であるから，部分積分法によって，

$$
\begin{aligned}
* &= x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx \\
&= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \\
&= x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.
\end{aligned}
$$

$$\therefore\qquad 2I=x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

ここで，公式(33.6)(114ページ)によって，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C_1$$

であるから，

$$I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)+C\qquad\left(C=\frac{a^2C_1}{2}\right).$$

これは，置換積分法で求めた公式(33.9)(115ページ)と一致する．（例3終）

例 4.　$I=\int e^{ax}\sin bx\,dx$，$J=\int e^{ax}\cos bx\,dx\qquad(a^2+b^2\neq 0)$.

$a\neq 0$ と仮定して，$f(x)=\sin bx$，$g'(x)=e^{ax}$ とおけば，

$$f'(x)=b\cos bx,\qquad g(x)=\frac{1}{a}e^{ax}$$

であるから，部分積分法によって，

$$
\begin{aligned}
\text{(34.2)}\qquad I &= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}J.
\end{aligned}
$$

同様に，$f(x)=\cos bx$，$g'(x)=e^{ax}$ とおいて，部分積分法を利用すれば，

$$
\begin{aligned}
\text{(34.3)}\qquad J &= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bx\,dx \\
&= \frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}I.
\end{aligned}
$$

(34.2)式，(34.3)式から，それぞれ，

$$\text{(34.4)}\qquad aI+bJ=e^{ax}\sin bx,$$

$$\text{(34.5)}\qquad bI-aJ=-e^{ax}\cos bx.$$

(34.4)式×a＋(34.5)式×b をつくって，I について解けば，

(34.6) $$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C.$$

(34.4)式×b−(34.5)式×a をつくって，J について解けば，

(34.7) $$J=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$$

(34.6)式，(34.7)式は，$b\neq0$ であるかぎり，$a=0$ のときもなりたつ．

(34.8) ∴ $$\begin{cases}\displaystyle\int e^{ax}\sin bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C \\ \hfill (a^2+b^2\neq0), \\ \displaystyle\int e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C \\ \hfill (a^2+b^2\neq0).\end{cases}$$

(例4終)

例 5.

(34.9) $$I_n=\int\sin^n x\,dx. \qquad (n=2, 3, \cdots).$$

(34.10) $$\begin{aligned}I_n&=\int\sin^{n-2}x\sin^2 x\,dx=\int\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx\\&=\int\sin^{n-2}x\,dx-\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx\\&=I_{n-2}-\int\cos x\cdot\sin^{n-2}x\cos x\,dx.\end{aligned}$$

ここで，$\sin x=u$ とおくと，$du=\cos x\,dx$ だから，置換積分法によって，

(34.11) $$\begin{aligned}\int\sin^{n-2}x\cos x\,dx&=\int u^{n-2}\,du=\frac{1}{n-1}u^{n-1}+C\\&=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x+C.\end{aligned}$$

さらに，$f(x)=\cos x$，$g'(x)=\sin^{n-2}x\cos x$ とおけば，

$$f'(x)=-\sin x, \qquad g(x)=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x \qquad (\because\ (34.11)式)$$

であるから，部分積分法によって，

$$\begin{aligned}\int\cos x\cdot\sin^{n-2}x\cos x\,dx&=\cos x\cdot\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\\&\quad+\int\sin x\cdot\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\,dx\\&=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{1}{n-1}I_n.\end{aligned}$$

これを(34.10)式に代入すれば,

$$I_n=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x-\frac{1}{n-1}I_n.$$

これを I_n について解いて, つぎの結果がえられる:

> I_n を(34.9)式によって定義するとき, つぎの漸化式がなりたつ:
>
> (34. 12)　　$I_n=-\dfrac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$　　$(n=2, 3, \cdots)$.

(例 5 終)

問 1. つぎの不定積分を求めよ:

(1) $\displaystyle\int x(x-1)^7\,dx.$　　(2) $\displaystyle\int\frac{x}{(2x+3)^2}\,dx.$

(3) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx.$　　(4) $\displaystyle\int x\sin 3x\,dx.$

(5) $\displaystyle\int x\cos^2 x\,dx.$　　(6) $\displaystyle\int x\tan^2 x\,dx.$

(7) $\displaystyle\int xe^x\,dx.$　　(8) $\displaystyle\int x^2e^{-x}\,dx.$

(9) $\displaystyle\int\log x\,dx.$　　(10) $\displaystyle\int x\log x\,dx.$

(11) $\displaystyle\int\tan^{-1}x\,dx.$　　(12) $\displaystyle\int\sin^{-1}x\,dx.$

(13) $\displaystyle\int e^x\cos x\,dx.$　　(14) $\displaystyle\int e^{-2x}\sin 3x\,dx.$

問 2. 例 3 にならって, つぎの公式をみちびけ:

$$\int\sqrt{x^2+a}\,dx=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2+a}+a\log|x+\sqrt{x^2+a}|)+C.$$

問 3. 例 5 にならって, つぎのことを証明せよ:

> $$J_n=\int\cos^n x\,dx$$
>
> とおくとき, つぎの漸化式がなりたつ:
>
> $$J_n=\frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x+\frac{n-1}{n}J_{n-2}\qquad(n=2, 3, \cdots).$$

§35. 有理式の積分

1. 一般の有理式

(35.1)
$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)} \qquad (p(x),\ q(x)\text{ は整式})$$
を積分する方法を考えよう.

> $p(x)$ の次数が, $q(x)$ の次数と同じか高い場合には, $p(x)$ を $q(x)$ で割って, その商を $s(x)$, 余りを $r(x)$ とすれば,
> $$\frac{p(x)}{q(x)}=s(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$
> と書ける; ここで, $s(x)$, $r(x)$ は整式で, $r(x)$ の次数は $q(x)$ の次数より低い. 整式 $s(x)$ の積分は簡単であるから, $\frac{r(x)}{q(x)}$ を積分する方法を考えればよい.

2. 部分分数展開 $p(x)$ の次数が $q(x)$ の次数より低い場合には, $q(x)$ の因数分解を,

(35.2)
$$q(x)=A(x-a)^k(x-b)^l\cdots(x^2+cx+f)^m(x^2+gx+h)^n\cdots$$
とするとき, つぎの形に**部分分数展開**できる:

(35.3)
$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)}&=\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a}\\&+\frac{B_1}{(x-b)^l}+\frac{B_2}{(x-b)^{l-1}}+\cdots+\frac{B_l}{x-b}\\&+\cdots\\&+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+cx+f)^m}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+cx+f)^{m-1}}+\cdots+\frac{C_mx+D_m}{x^2+cx+f}\\&+\frac{E_1x+F_1}{(x^2+gx+h)^n}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+gx+h)^{n-1}}+\cdots+\frac{E_nx+F_n}{x^2+gx+h}\\&+\cdots.\end{aligned}$$

したがって, この右辺の係数 $A_1,\cdots,A_k,B_1,\cdots,B_l,\cdots,C_1,\cdots,C_m,D_1,\cdots,D_m,E_1,\cdots,E_n,F_1,\cdots,F_n,\cdots$ を求めた後, この右辺を積分すればよいわけである. 以下, (35.2)式の因数分解をいくつかの形に類別して, それぞれの形の代表例について, 部分分数展開の係数を求め, 積分する方法を述べる.

3. $q(x)=(x-a)(x-b)$ 形

例 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-1}$.

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$

とおき，ふたたび，右辺を通分すれば，

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{x^2-1}=\frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1}.$$

この両辺の分子の係数を比較して，

$$\begin{cases}A+B=0,\\ A-B=1.\end{cases}$$

この連立方程式を解けば，

$$A=-B=\frac{1}{2}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2-1}&=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}\\ &=\frac{1}{2}\log|x-1|-\frac{1}{2}\log|x+1|+C\\ &=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{x^2-1}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$$

これは，§32 の 2 項 (111 ページ) であげた公式である． (例 1 終)

4. $q(x)=(x-a)(x^2+cx+f)$ 形

例 2. $\displaystyle\int\frac{dx}{(1-x)(1+x^2)}$.

(35.4) $$\frac{1}{(1-x)(1+x^2)}=\frac{A}{1-x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}=\frac{A(1+x^2)+(Bx+C)(1-x)}{(1-x)(1+x^2)}.$$

(35.5) $$\therefore\quad 1=A(1+x^2)+(Bx+C)(1-x).$$

未定係数 A, B, C を決定するために，例 1 のように，A, B, C の連立 1 次方程式をつくって，それを解いてもよいが，整式 (35.5) がある程度複雑になった場合には，つぎの方法による方が簡単で，計算ミスも少ない：

(35.4) 式の左辺の分母：$(1-x)(1+x^2)=0$ の解：$x=1$，$x=i$ (i は虚数単位：$i=\sqrt{-1}$) を (35.5) 式に代入する．(35.5) 式において，

$x=1$ とおけば，$1=2A$. $\quad\therefore\quad A=\dfrac{1}{2}.$

$x=i$ とおけば，$1=(Bi+C)(1-i)=B+C+(B-C)i.$

$$\therefore\quad B+C=1,\qquad B-C=0.\qquad\therefore\quad B=C=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{(1-x)(1+x^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{1+x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1-x}+\frac{1}{4}\int\frac{2x}{1+x^2}dx+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2}.$$

ここで，$1+x^2=u$ とおけば，$du=2x\,dx$ だから，置換積分法によって，

$$\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\int\frac{du}{u}=\log|u|+C_1$$
$$=\log(1+x^2)+C_1.$$

したがって，

$$\int\frac{dx}{(1-x)(1+x^2)}=-\frac{1}{2}\log|1-x|+\frac{1}{4}\log(1+x^2)+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+C$$
$$=\frac{1}{2}\left(\log\frac{\sqrt{1+x^2}}{|1-x|}+\tan^{-1}x\right)+C.$$ （例2終）

5. $q(x)=(x-a)^m$ 形

例 3. $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x-1)^3}dx.$

$$\frac{x^2}{(x-1)^3}=\frac{A}{(x-1)^3}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1}$$
$$=\frac{A+B(x-1)+C(x-1)^2}{(x-1)^3}.$$

(35.6) $\qquad\therefore\quad x^2=A+B(x-1)+C(x-1)^2.$

この式で，$x=1$ とおけば，$1=A$. $\quad\therefore\quad A=1.$

整式(35.6)の両辺を微分すれば，

(35.7) $\qquad 2x=B+2C(x-1).$

この式で，$x=1$ とおけば，$2=B$. $\quad\therefore\quad B=2.$

さらに，整式(35.7)の両辺を微分すれば，

(35.8) $\qquad 2=2C.\quad\therefore\quad C=1.$

したがって，

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^3}\,dx = \int \frac{dx}{(x-1)^3} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \int (x-1)^{-3}\,dx + 2\int (x-1)^{-2}\,dx + \int \frac{dx}{x-1}$$

$$= \frac{1}{-2}(x-1)^{-2} + \frac{2}{-1}(x-1)^{-1} + \log|x-1| + C$$

$$= -\frac{1}{2(x-1)^2} - \frac{2}{x-1} + \log|x-1| + C.$$

(例3終)

6. $q(x)=(x^2+cx+f)^m$ 形

例 4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.$

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}.$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx$$

$$= \tan^{-1} x - \int x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = *.$$

ここで，$1+x^2=u$ とおくと，$du=2x\,dx$ だから，置換積分法によって，

$$\int \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int (1+x^2)^{-2}\cdot 2x\,dx \tag{35.9}$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-2}\,du = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-1}u^{-1} + C_1$$

$$= -\frac{1}{2(1+x^2)} + C_1.$$

さらに，$f(x)=x$，$g'(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ とおいて，(35.9)式を利用すれば，

$$f'(x)=1, \qquad g(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)}$$

であるから，部分積分法によって，

$$\int x\cdot\frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = x\left\{-\frac{1}{2(1+x^2)}\right\} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x - C.$$

したがって，

$$* = \tan^{-1} x - \left(-\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\tan^{-1} x - C\right).$$

$$(35.10)\qquad \therefore\quad \int\frac{dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}+\tan^{-1}x\right)+C.$$

（例 4 終）

問 1. 1項の結果を利用して，つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int\frac{x^2}{x-a}dx.$　　（2） $\displaystyle\int\frac{x^4}{x^2+1}dx.$

問 2. つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2-4}dx.$　　（2） $\displaystyle\int\frac{x}{x^2-3x+2}dx.$

（3） $\displaystyle\int\frac{x^3}{(x-1)(x-2)(x-3)}dx.$　　（4） $\displaystyle\int\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx.$

（5） $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^3-1}dx.$　　（6） $\displaystyle\int\frac{x^2+x+1}{(x+1)^3}dx.$

（7） $\displaystyle\int\frac{3x^2+8x-1}{(x-3)(x+2)^2}dx.$　　（8） $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-1)^2}.$

（9） $\displaystyle\int\frac{8x+10}{(x+2)^2(x^2+2x+2)}dx.$　　（10） $\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+x^2)^2}.$

問 3. 公式(35.10)を利用して，つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2+2x+2)^2}.$　　*（2） $\displaystyle\int\frac{dx}{(x^2-2x+5)^2}.$

問 4. 公式(35.10)を用い，例 4 にならって，つぎの不定積分を求めよ:

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^3}.$$

問 5. 例4の不定積分 $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}$ を，$x=\tan t$ とおく置換積分法によって求めよ.

§ 36. sin x, cos x の有理式の積分

1. sin x, cos x の有理式の積分

定理 36.1 $f(u,v)$ は u, v の有理式とする．そのとき，

$$(36.1)\qquad \int f(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

の形の積分は，

(36. 2) $$\underset{\sim\sim\sim}{\tan\frac{x}{2}=t}$$

とおいて，積分変数の変換を行えば，t の有理式の積分となる：

(36. 3) $$\int f(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

この右辺の**被積分関数**（積分される関数）は，t の有理式であるから，前節で述べた方法で積分できる．

証明　3 角関数の公式(19 ページ)を利用すれば，

(36. 4)

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{2t}{1+t^2},$$

(36. 5)

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\left(1-\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\sec^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

さらに，(36.2)式から，

$$\frac{dt}{dx}=\left(\tan\frac{x}{2}\right)'=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)=\frac{1+t^2}{2}.$$

これから，逆関数の微分の公式によって，

(36. 6) $$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

(36.4), (36.5), (36.6) の 3 つの関係式から，置換積分法によって，(36.3)式がえられる．（証明終）

2. 応用例

例. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}.$

$$\tan\frac{x}{2}=t$$

とおけば,

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

したがって, 置換積分法によって,

$$\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\int\frac{1}{\dfrac{2t}{1+t^2}+2\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+3}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

$$=\int\frac{2}{t^2+2t+5}\,dt=\int\frac{2}{(t+1)^2+2^2}\,dt$$

$$=\int\frac{1}{1+\left(\dfrac{t+1}{2}\right)^2}\cdot\frac{1}{2}\,dt=*.$$

ここで, $\dfrac{t+1}{2}=u$ とおけば, $du=\dfrac{1}{2}\,dt$ だから, 置換積分法によって,

$$*=\int\frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u+C=\tan^{-1}\frac{t+1}{2}+C$$

$$=\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right\}+C.$$

$$\therefore\quad \int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}=\tan^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)\right\}+C.$$ (例終)

問. 定理 36.1 の方法を利用して, つぎの不定積分を求めよ:

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\cos x}$. (2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

(3) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$. (4) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$.

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x+2\cos x+1}$. (6) $\displaystyle\int\frac{dx}{3-2\sin x}$.

§ 37. 無理式の積分

無理式の積分について, 適当な置換積分によって, 有理式の積分に帰着する典型的な, いくつかの場合について例示しよう.

1.

例 1. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}$.

$\sqrt{1-x}=t$ とおけば,

$$x=1-t^2, \qquad dx=-2t\,dt.$$

ゆえに，置換積分法によって,

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}=\int\frac{1}{(1-t^2)t}\cdot(-2t)\,dt=2\int\frac{dt}{t^2-1}$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}+1}\right|+C.$$

(例 1 終)

2.

例 2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{x^{\frac{1}{2}}}{1+x^{\frac{1}{3}}}\,dx=\int\frac{\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3}{1+\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2}\,dx$$

と書けることに注意して，$x^{\frac{1}{6}}=t$ とおけば,

$$x=t^6, \quad \sqrt{x}=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^3=t^3, \quad \sqrt[3]{x}=\left(x^{\frac{1}{6}}\right)^2=t^2, \quad dx=6t^5\,dt$$

であるから，置換積分法によって,

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=\int\frac{t^3}{1+t^2}\cdot 6t^5\,dt=6\int\frac{t^8}{t^2+1}\,dt=*.$$

ここで，§35 の 1 項 (121 ページ) で述べた方法にしたがって，t^8 を t^2+1 で割る除法を右のように行えば,

$$\begin{array}{r@{\,}l} & t^6-t^4+t^2-1 \\ t^2+1\,) & t^8 \\ & t^8+t^6 \\ \hline & -t^6 \\ & -t^6-t^4 \\ \hline & t^4 \\ & t^4+t^2 \\ \hline & -t^2 \\ & -t^2-1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$*=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

$$=6\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\tan^{-1}t\right)+C$$

$$=6\left(\frac{x^{\frac{7}{6}}}{7}-\frac{x^{\frac{5}{6}}}{5}+\frac{x^{\frac{3}{6}}}{3}-x^{\frac{1}{6}}+\tan^{-1}x^{\frac{1}{6}}\right)+C.$$

$$\therefore \quad \int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx=6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7}-\frac{\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{\sqrt{x}}{3}-\sqrt[6]{x}+\tan^{-1}\sqrt[6]{x}\right)+C.$$

(例 2 終)

3.

例 3. $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{2-x-x^2}}dx.$

$$\sqrt{2-x-x^2}=\sqrt{-(x-1)(x+2)}=(x+2)\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}.$$

ここで，$\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}=t$ とおけば，

$$x=\frac{1-2t^2}{1+t^2}=-2+\frac{3}{1+t^2},\qquad dx=-\frac{6t}{(1+t^2)^2}dt.$$

さらに，
$$\sqrt{2-x-x^2}=(x+2)t=\frac{3t}{1+t^2}.$$

したがって，置換積分法によって，

$$\int\frac{x}{\sqrt{2-x-x^2}}dx=\int\frac{1-2t^2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{3t}\left(-\frac{6t}{(1+t^2)^2}\right)dt$$

$$=2\int\frac{2t^2-1}{(1+t^2)^2}dt=4\int\frac{dt}{1+t^2}-6\int\frac{dt}{(1+t^2)^2}$$

$$=4\tan^{-1}t-\frac{6}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\tan^{-1}t\right)+C$$

（∵　公式(35.10)(125 ページ)）

$$=-\frac{3t}{1+t^2}+\tan^{-1}t+C$$

$$=-\sqrt{2-x-x^2}+\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}+C.$$ （例 3 終）

4.

例 4. $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$

$\sqrt{x^2+a}=t-x$ とおけば，$x^2+a=t^2-2tx+x^2$.

$$\therefore\quad x=\frac{t^2-a}{2t}=\frac{1}{2}(t-at^{-1}),\qquad dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt.$$

$$\sqrt{x^2+a}=t-x=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t}.$$

$$\therefore\quad\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\int\frac{2t}{t^2+a}\cdot\frac{t^2+a}{2t^2}dt=\int\frac{1}{t}dt$$

$$=\log|t|+C=\log|x+\sqrt{x^2+a}|+C.$$

これは，§ 32 の 2 項 (111 ページ) であげた公式である． （例 4 終）

問 1. 例 1 にならって，つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}\,dx.$ （2） $\displaystyle\int\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}}\,dx.$

問 2. 例 2 にならって，つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx.$ （2） $\displaystyle\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

問 3. 例 3 にならって，つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx.$ （2） $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $(a<x<b).$

問 4. 例 4 にならって，つぎの不定積分を求めよ:

（1） $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$ （2） $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-5}}.$

10

定 積 分

§ 38. 定 積 分

1. 定 積 分　区間 $[a, b]$ のすべての x に対して,

$$|f(x)| \leqq M$$

をみたす定数 M が存在するとき, $f(x)$ は $[a, b]$ で**有界**であるという.

$f(x)$ は $[a, b]$ で有界であると仮定しよう. $[a, b]$ を任意の幅の有限個の小区間に分割し, その**分割** $\varDelta$ を,

(38.1)　$$\varDelta: \quad a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b,$$

各小区間の幅を

(38.2)　$$h_i = a_i - a_{i-1} \qquad (i = 1, \cdots, n)$$

とする(図 38.1).

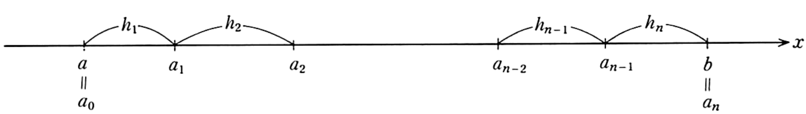


図 38.1

各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ の任意の値 x_i に対して, つぎのような和 (**近似和**という) をつくる:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i = f(x_1)h_1 + f(x_2)h_2 + \cdots + f(x_n)h_n.$$

この和は, $f(x) \geqq 0$ の場合, 図 38.2 (つぎのページ)のような階段状の部分の面積を表し, 分割 $\varDelta$ のえらび方, と値 x_i の組 $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ のえらび方, によっ

て定まる．そこで，この和を，

(38．3)　$S[\Delta, X] \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i$

によって表す．

さて，小区間の幅 h_i $(i=1, \cdots, n)$ のうち，　最大のものを $\delta[\Delta]$ とする；
すなわち，

$$\delta = \delta[\Delta] = \max(h_1, \cdots, h_n).$$

いま，

$$\delta[\Delta] \to 0$$

となるように，分割 Δ をかぎりなく細かくしていったときに，

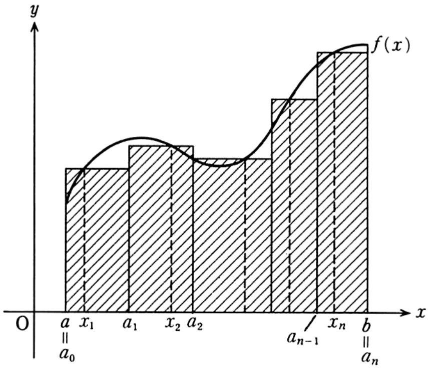


図 38.2

分割 Δ を細かくする仕方，

x_i の組 $X = \{x_i\}_{i=1}^{n}$ のえらび方

に無関係に，$S[\Delta, X]$ が一定の値 I にかぎりなく近づくならば；すなわち，

$$S[\Delta, X] \to I \qquad (\delta[\Delta] \to 0)$$

ならば，この I を，$f(x)$ の a から b までの**定積分**といい，

(38．4)　$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

で表す；すなわち，

(38．5)　$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} \{f(x_1)h_1 + f(x_2)h_2 + \cdots + f(x_n)h_n\}.$$

そして，$f(x)$ は $[a, b]$ で**積分可能**であるという．また，定積分(38.4)の値を求めることを，$f(x)$ を $[a, b]$ で**積分する**という．

2．近似和のえらび方　　$f(x)$ が $[a, b]$ で積分可能であるとき，分割 Δ として，$[a, b]$ の n 等分がよく用いられる．さらに，分割 Δ を細かくする仕方として，この n 等分で，n を大きくしていく方法がよく用いられる．この方法を用いれば，$\dfrac{b-a}{n} = h$ とおくとき，分割 Δ の分点は，

(38．6)　$$a_i = a + ih \qquad (i = 0, 1, \cdots, n)$$

であって，定積分(38.5)は，つぎのような極限値として表せる：

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty} h\{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\} \qquad \left(h=\frac{b-a}{n}\right). \tag{38.7}$$

さらに，x_i $(i=1, \cdots, n)$ としては，(38.6)式の分点 a_i をもって，

$$x_i=a_{i-1} \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{38.8}$$

または，

$$x_i=a_i \qquad (i=1, \cdots, n) \tag{38.9}$$

とえらぶ方法がよく用いられる．

3. 積分可能性

定理 38.1　$f(x)$ が $[a, b]$ で単調な関数ならば，そこで，積分可能である．

証明† 減少関数の場合も同様であるから，$f(x)$ が増加関数である場合について証明する．

(38.1)式の $[a, b]$ の分割 Δ に対して，近似和：

$$s[\Delta]=f(a_0)h_1+f(a_1)h_2+\cdots+f(a_{n-1})h_n,$$
$$S[\Delta]=f(a_1)h_1+f(a_2)h_2+\cdots+f(a_n)h_n,$$
$$S[\Delta, X]=f(x_1)h_1+f(x_2)h_2+\cdots+f(x_n)h_n$$

をつくれば，$f(x)$ は増加関数であるから，$S[\Delta, X]-s[\Delta]$ は，図 38.3 のようなうすずみ色部分の面積を表し，$S[\Delta]-S[\Delta, X]$ は，斜線部分の面積を表す．

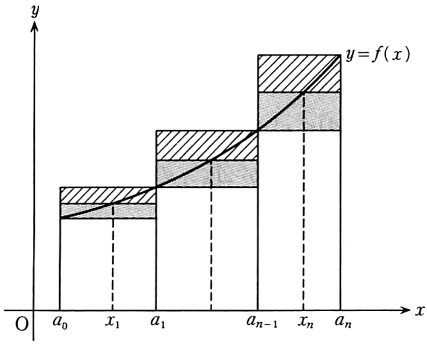


図 38.3

† この証明は省略して，先にすすんでもよい．

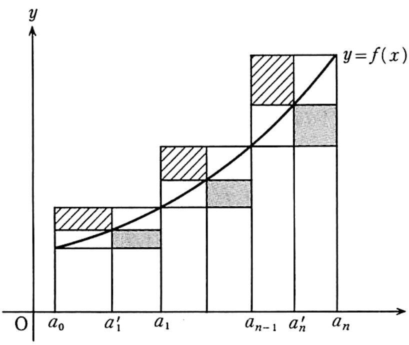
(38.10)　　$\therefore \quad s[\varDelta] \leqq S[\varDelta, X] \leqq S[\varDelta].$

さらに，$h_1, \cdots, h_n$ の最大値を $\delta=\delta[\varDelta]$ とすれば，

$$\begin{aligned}0 &< S[\varDelta]-s[\varDelta] \\ &=\{f(a_1)-f(a_0)\}h_1+\{f(a_2)-f(a_1)\}h_2+\cdots+\{f(a_n)-f(a_{n-1})\}h_n \\ &\leqq \{f(a_1)-f(a_0)\}\delta+\{f(a_2)-f(a_1)\}\delta+\cdots+\{f(a_n)-f(a_{n-1})\}\delta \\ &=\{f(b)-f(a)\}\delta.\end{aligned}$$

(38.11)　$\therefore \quad 0<S[\varDelta]-s[\varDelta] \leqq \{f(b)-f(a)\}\delta[\varDelta].$

つぎに，分割 $\varDelta$ の各小区間をさらに分割して，$\varDelta$ の分割を細かくしたものを $\varDelta_1$ とする．$\varDelta_1$ を $\varDelta$ の**細分**とよぶ．そのとき，$s[\varDelta_1]-s[\varDelta]$ は，図 38.4 のようなうすずみ色部分の面積を表し，$S[\varDelta]-S[\varDelta_1]$ は，斜線部分の面積を表すことに注意すれば，



$a_1', \cdots, a_n'$ は細分によってふえた分割点

図 38.4

(38.12)　　$s[\varDelta]<s[\varDelta_1]<S[\varDelta_1]<S[\varDelta].$

さて，$\{\varDelta_m'\}_{m=0}^{\infty}$ は，$\varDelta_m'$ ($m \geqq 1$) が $\varDelta_{m-1}'$ の細分であるような $[a, b]$ の分割の列で，

(38.13)　　$\delta[\varDelta_m'] \to 0 \qquad (m \to \infty)$

をみたすものとする．そのとき，(38.12)式によって，

(38.14)　$s[\varDelta_0']<s[\varDelta_1']<\cdots<s[\varDelta_m']<\cdots<S[\varDelta_m']<\cdots<S[\varDelta_1']<S[\varDelta_0'].$

さらに，(38.11)式と(38.13)式によって，

(38.15)　$0<S[\varDelta_m']-s[\varDelta_m'] \leqq \{f(b)-f(a)\}\delta[\varDelta_m'] \to 0 \qquad (m \to \infty).$

(38.14)式と(38.15)式によって，2つの数列：$\{s[\varDelta_m']\}_{m=0}^{\infty}$，$\{S[\varDelta_m']\}_{m=0}^{\infty}$ は同じ極限値 I に近づく：

(38.16)　　$\lim_{m\to\infty} s[\varDelta_m'] = \lim_{m\to\infty} S[\varDelta_m'] = I.$

つぎに，$\{\varDelta_m\}_{m=0}^{\infty}$ は，

$$\delta[\varDelta_m]\to 0 \qquad (m\to\infty) \tag{38.17}$$

であるような，$[a, b]$ の任意の分割の列とする．そのとき，

$$\lim_{m\to\infty} S[\varDelta_m, X_m]=I \tag{38.18}$$

を示せば，証明は終わる；ここで，X_m は $\varDelta_m$ に対する x_i の組を表す．

$\varDelta''_m$ ($m=0, 1, \cdots$) は，$\varDelta_m$ と $\varDelta'_m$ の両方のすべての分点を，分点とする $[a, b]$ の分割とする．そのとき，$\varDelta''_m$ は $\varDelta_m$ と $\varDelta'_m$ の両方の細分であるから，(38.12)式によって，それぞれ，

$$s[\varDelta_m]\leqq s[\varDelta''_m]<S[\varDelta''_m]\leqq S[\varDelta_m], \tag{38.19}$$

$$s[\varDelta'_m]\leqq s[\varDelta''_m]<S[\varDelta''_m]\leqq S[\varDelta'_m] \qquad (m=0, 1, \cdots). \tag{38.20}$$

(38.16)式と(38.20)式によって，

$$\lim_{m\to\infty} s[\varDelta''_m]=\lim_{m\to\infty} S[\varDelta''_m]=I. \tag{38.21}$$

また，(38.11)式と(38.17)式によって，

$$0<S[\varDelta_m]-s[\varDelta_m]\leqq\{f(b)-f(a)\}\delta[\varDelta_m]\to 0 \qquad (m\to\infty). \tag{38.22}$$

そのとき，(38.19)式，(38.21)式，(38.22)式によって，

$$\lim_{m\to\infty} s[\varDelta_m]=\lim_{m\to\infty} S[\varDelta_m]=I.$$

この極限関係と(38.10)式によってえられる，

$$s[\varDelta_m]\leqq S[\varDelta_m, X_m]\leqq S[\varDelta_m]$$

から，極限関係(38.18)式がえられる．　　(証明終)

定理 38.1 から，つぎの定理がえられる:

定理 38.2　$[a, b]$ を有限個の部分区間に分割できて，各部分区間で，$f(x)$ が単調または一定ならば (図 38.5)，$f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能である．

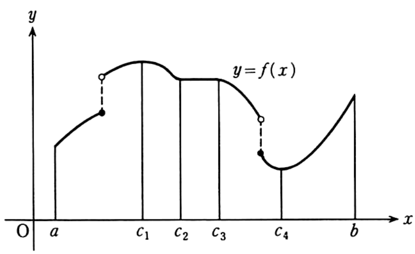


図 38.5

さらに，つぎの定理がなりたつことが示される:

定理 38.3　$f(x)$ が $[a, b]$ で連続ならば，そこで積分可能である．

4．幾何学的意味

定理 38.4　$f(x)$ は $[a, b]$ で連続で $f(x) \geqq 0$ とし，曲線: $y=f(x)$ と直線: $x=a$，直線: $x=b$ および x-軸によってかこまれた部分の面積を A とする(図 38.6)．そのとき，

(38.23)　$$A=\int_a^b f(x)\,dx.$$　(**定積分の幾何学的意味**)

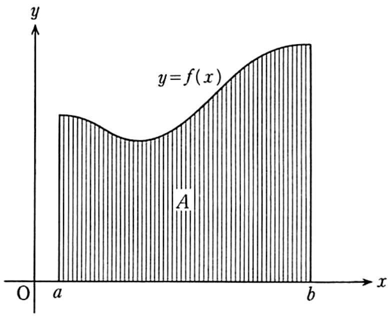


図 38.6

証明　$M_i = \max_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x)$，　$m_i \equiv \min_{a_{i-1} \leqq x \leqq a_i} f(x)$　$(i=1, \cdots, n)$

とし，

$$S[\Delta]=\sum_{i=1}^n M_i h_i,$$

$$s[\Delta]=\sum_{i=1}^n m_i h_i$$

とすれば，$S[\Delta]$，$s[\Delta]$ は，ともに，近似和であって，図 38.7 において，$S[\Delta]$ は斜線の階段状の部分の面積を表し，$s[\Delta]$ はうすずみ色の階段状の部分の面積を表すことに注意すれば，

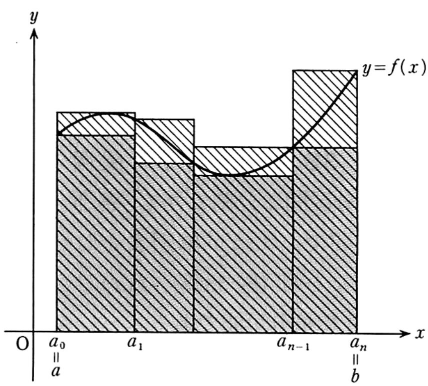


図 38.7

(38.24)　$$s[\Delta] \leqq A \leqq S[\Delta].$$

一方，定理 38.3 によって，$f(x)$ は積分可能であるから，

(38.25)　$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} s[\Delta] = \lim_{\delta[\Delta]\to 0} S[\Delta].$$

(38.24)式と(38.25)式から，(38.23)式がえられる．　(証明終)

問 1. つぎの定積分を，定積分の定義(38.5)にしたがって求めよ:

$$\int_a^b 1\, dx.$$

問 2. つぎの定積分を，(38.7)式と(38.8)式，および(38.7)式と(38.9)式を用いて，それぞれ，2通りの方法で求めよ:

（1） $\int_a^b x\, dx.$ （2） $\int_a^b x^2\, dx.$

§ 39. 定積分の基本性質

1. 基本性質

定理 39.1

（i） $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx$ （複号同順）.

（ii） $\int_a^b c f(x)\, dx = c\int_a^b f(x)\, dx$ （c は定数）.

（iii） $\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$ （$a < c < b$）.

（iv） $[a, b]$ で $f(x) \leqq g(x)$ ならば，

$$\int_a^b f(x)\, dx \leqq \int_a^b g(x)\, dx.$$

（v） $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\, dx.$ **（定積分の基本性質）**

証明 （i），（ii），（iii），（iv）については，定積分の定義から明らかであろう．（v）については，積分の近似和 (38.3)において，

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|\, h_i$$

がなりたつことに注意すれば，この近似和の，$[a, b]$ の分割を細かくしていったときの極限として，（v）がえられる． （証明終）

便宜上，

(39.1) $$\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx \qquad (a < b),$$

(39.2) $$\int_a^a f(x)\, dx = 0$$ **（定積分の積分範囲の拡張）**

と定義する．そのとき，(iii)は，任意な大小関係の a, b, c に対してなりたつことがわかる．たとえば，$a<b<c$ ならば，(iii)によって，

$$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx.$$

ゆえに，(39.1)式によって，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx-\int_b^c f(x)\,dx$$
$$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx \qquad (a<b<c).$$

2. 積分の平均値の定理

定理 39.2　$[a, b]$ で $m \leqq f(x) \leqq M$ ならば，

$$m(b-a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b-a).$$

証明　$\int_a^b 1\,dx=b-a$ に注意すれば，定理 39.1 の (ii)，(iv) によって，

$$m(b-a)=\int_a^b m\,dx \leqq \int_a^b f(x)\,dx$$
$$\leqq \int_a^b M\,dx = M(b-a). \qquad \text{(証明終)}$$

定理 39.3　$f(x)$ が $[a, b]$ で連続ならば，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の値 μ に対して，

$$f(c)=\mu \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する．　**(中間値の定理)**

証明は，図 39.1 から，直観的には，明らかであろう．

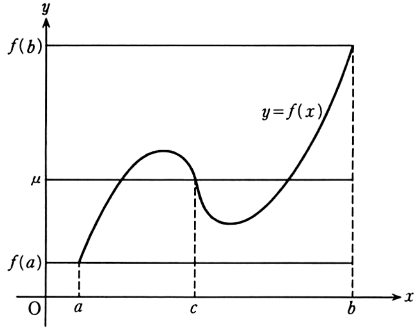


図 39.1

定理 39.4 $f(x)$ が $[a, b]$ で連続ならば,

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a) \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する(図 39.2).

(積分の平均値の定理)

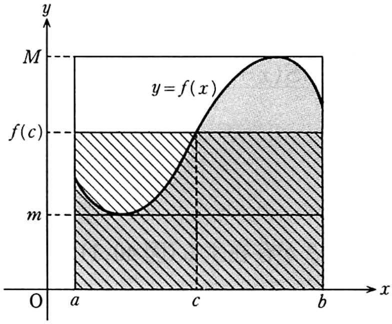


図 39.2

証明
$$m=\min_{a\leq x\leq b} f(x), \qquad M=\max_{a\leq x\leq b} f(x)$$

とおくとき，定理 39.2 によって,

$$m\leqq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leqq M.$$

そのとき，中間値の定理によって,

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad (a<c<b)$$

をみたす c が存在する. (証明終)

問. $f(x)$ が連続で, $f(x)>0$ ならば,

$$F(x)\equiv\int_a^x f(t)\,dt$$

は，増加関数であることを証明せよ.

§ 40. 定積分と不定積分

1. 定積分と不定積分の関係 $f(x)$ の定積分を基礎にして，関数:

$$S(x)\equiv\int_a^x f(t)\,dt \tag{40.1}$$

を定義しよう. そのとき，つぎの定理がなりたつ:

定理 40.1 $f(x)$ が連続ならば，(40.1)式の $S(x)$ は, $f(x)$ の原始関数の 1 つである; すなわち,

$$S'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt=f(x).$$

証明 $h>0$ のとき，定理 39.1 の(iii)(137 ページ)と積分の平均値の定理(139 ページ) によって，

(40.2) $$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt \qquad (\because\ \text{定理 39.1 の(iii)})$$

$$=f(\xi) \quad (x<\xi<x+h;\ \because\ \text{積分の平均値の定理})$$

をみたす ξ が存在する(図 40.1).

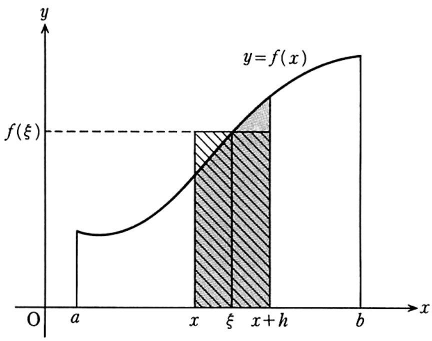


図 40.1

$h<0$ のときも，定理 39.1 の(iii)と積分の平均値の定理によって，

(40.3) $$\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\frac{1}{-h}\left\{\int_a^{x} f(t)\,dt-\int_a^{x+h} f(t)\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{-h}\int_{x+h}^{x} f(t)\,dt \qquad (\because\ \text{定理 39.1 の(iii)})$$

$$=f(\xi) \quad (x+h<\xi<x;\ \because\ \text{積分の平均値の定理})$$

をみたす ξ が存在する．

(40.2)式と(40.3)式のどちらの場合も，

$$h\to 0 \quad \text{のとき,} \quad \xi\to x$$

であって，$f(x)$ は連続であることに注意すれば，

$$S'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{S(x+h)-S(x)}{h}=\lim_{h\to 0} f(\xi)$$

$$=f(x).$$

(証明終)

定理 40.2 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ の任意の原始関数を $F(x)$ とすれば，

(40.4) $$\int_a^b f(x)\,dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a).$$

証明 定理 40.1 によって,

$$S(x) \equiv \int_a^x f(t)\,dt$$

は, $f(x)$ の原始関数の 1 つであることから, 定理 32.1 (109 ページ) によって,

$$F(x) = S(x) + C.$$

$$\therefore \quad F(b) - F(a) = \{S(b) + C\} - \{S(a) + C\} = S(b) - S(a)$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \int_a^a f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \quad \text{(証明終)}$$

問. 定理 40.1 を利用して, $f(x)$ が連続であるとき, つぎの微分を求めよ:

（1） $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^b f(t)\,dt.$ （2） $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt.$

（3） $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{x^2} f(t)\,dt.$ （4） $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt.$

§ 41. 定積分の計算

1. 定積分の計算 定理 40.2 によって, $f(x)$ の原始関数の 1 つ $F(x)$ を求めれば, $f(x)$ の定積分は, 公式(40.4)を利用して求めることができる.

例 1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$ (図 41.1).

$\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C$ であるから,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

(例 1 終)

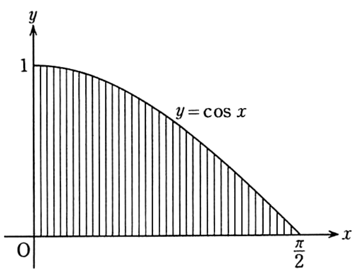


図 41.1

例 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \log|x + \sqrt{x^2+1}| + C$ (§ 32 の 2 項 (111 ページ)) であるから,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \Big[\log|x + \sqrt{x^2+1}|\Big]_0^1$$

$$= \log(1+\sqrt{2}) - \log 1 = \log(1+\sqrt{2}). \quad \text{(例 2 終)}$$

2. 置換積分法

定理 41.1 $x=\varphi(t)$ が $[\alpha,\beta]$ で微分可能ならば,

$$a=\varphi(\alpha), \qquad b=\varphi(\beta)$$

とおくとき,

$$(41.1) \qquad \int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt. \qquad \textbf{(定積分の置換積分法)}$$

証明 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数の1つとすれば, 合成関数の微分の公式 (12 ページ) によって,

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt}=F'(\varphi(t))\varphi'(t)=f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

ゆえに, $F(x)=F(\varphi(t))$ は, $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数の1つである. そのとき, 定理 40.2(140 ページ)によって,

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=F(\varphi(\beta))-F(\varphi(\alpha))$$

$$=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

(証明終)

例 3. $\displaystyle\int_0^1 (1-x)^\alpha\,dx \qquad (\alpha>0).$

$1-x=u$ とおけば, $x=1-u$ で, $du=-dx$.

$$\begin{cases} x:\ 0\sim1, & x \text{ が } 0 \text{ から } 1 \text{ までかわるとき,} \\ u:\ 1\sim0; & u \text{ が } 1 \text{ から } 0 \text{ までかわることを表す.} \end{cases}$$

$$\therefore \qquad \int_0^1 (1-x)^\alpha\,dx=\int_1^0 u^\alpha(-du)=\int_0^1 u^\alpha\,du$$

$$=\left[\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}\right]_0^1=\frac{1}{\alpha+1}.$$

(例 3 終)

例 4. $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad (a>0;$ 図 41.2).

$x=a\sin t \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおけば,

$$\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}$$

$$=a\sqrt{1-\sin^2 t}$$

$$=a\sqrt{\cos^2 t}$$

$$=*.$$

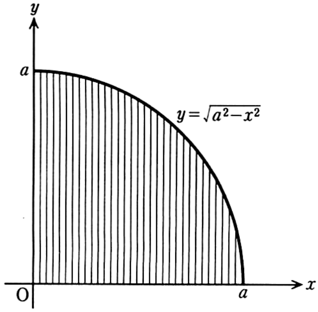


図 41.2

$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，$\cos t \geqq 0$ であるから，

$$* = a \cos t.$$

$$dx = a \cos t \, dt, \qquad \begin{cases} t: 0 \sim \dfrac{\pi}{2}, \\ x: 0 \sim a. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot a \cos t \, dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

（例 4 終）

3．部分積分法

> **定理 41.2** $f(x)$, $g(x)$ が，ともに，$[a, b]$ で微分可能ならば，
>
> (41. 2) $$\int_a^b f(x) g'(x) \, dx = \Big[f(x) g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx.$$
>
> **（定積分の部分積分法）**

証明 積の微分の公式（11 ページ）によって，

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

$$\therefore \quad f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x).$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)g'(x) \, dx = \int_a^b \{f(x)g(x)\}' \, dx - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx = *.$$

ここで，$f(x)g(x)$ は $\{f(x)g(x)\}'$ の原始関数だから，定理 40.2（140 ページ）によって，

$$* = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) \, dx.$$

（証明終）

例 5. $\displaystyle\int_1^e x \log x \, dx.$

$$\int_1^e x \log x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \log x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} \log e - \frac{1}{2} \log 1\right) - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$= \frac{e^2}{2} - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2 + 1}{4}.$$

（例 5 終）

例 6. $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,\qquad J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx.$

まず，積分変数の変換：$\frac{\pi}{2}-x=u$ を行うことによって，

$$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n u\cdot(-du)=I_n.$$

つぎに，公式 (34.12) (120 ページ) によって，

$$\int \sin^n x\,dx=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx \qquad (n=2,3,\cdots).$$

$$\therefore\qquad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$$

$$=-\frac{1}{n}\Big[\sin^{n-1}x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2}x\,dx$$

$$=\frac{n-1}{n}I_{n-2}.$$

したがって，この漸化式をくりかえし用いることによって，

n が偶数のとき：

$$I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}I_{n-4}=\cdots$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}I_0=*.$$

ここで，

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^0\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\,dx=\Big[\,x\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore\qquad *=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad (n\geqq 2).$$

n が奇数のとき：

$$I_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}I_1=**.$$

ここで，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1.$$

$$\therefore\qquad **=\frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} \qquad (n\geqq 3).$$

したがって，

$$(41.3)\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$
$$= \begin{cases} \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2}\cdot\dfrac{\pi}{2} & (n\text{ は偶数で，}n\geqq 2), \\ \dfrac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} & (n\text{ は奇数で，}n\geqq 3). \end{cases}$$

（例 6 終）

4．不等式と極限値への応用

例 7. $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}>\log(n+1)\qquad (n=1, 2, \cdots).$

$y=\dfrac{1}{x}$ は減少関数だから，$k<x<k+1$ において，$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{k}$.

$$(41.4)\qquad \therefore\quad \int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\int_k^{k+1}\frac{1}{k}\,dx=\frac{1}{k}\qquad (\text{図 } 41.3).$$

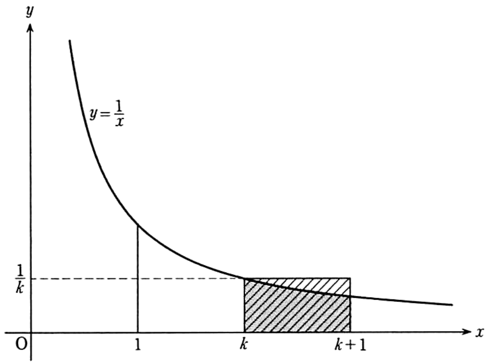


図 41.3

$k=1, 2, \cdots, n$ について，(41.4)式の和をとれば，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

ところで，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}\,dx$$
$$=\Big[\log|x|\Big]_1^{n+1}=\log(n+1).$$

$$(41.5) \qquad \therefore \qquad \log(n+1) < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (n=1,2,\cdots).$$

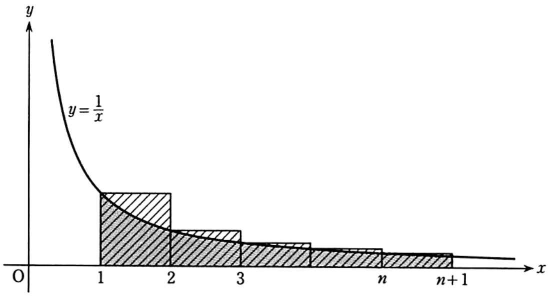


図 41.4

図 41.4 において，うすずみ色部分の面積が $\log(n+1)$ に等しい．（例 7 終）

例 8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right\}$$

$$=*.$$

と書けるから，公式 (38.7)，(38.9)（133 ページ）によって（図 41.5），

$$*=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1$$

$$=\log 2-\log 1=\log 2. \qquad \text{（例 8 終）}$$

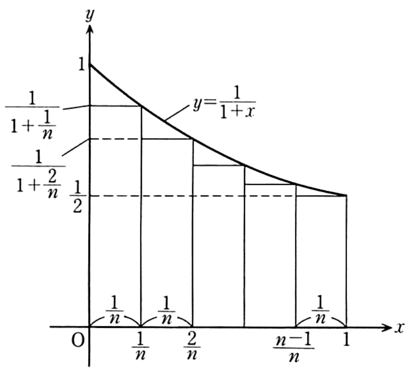


図 41.5

問 1. つぎの定積分の値を求めよ:

*（1） $\displaystyle\int_a^b (x-a)^2(x-b)\,dx.$ （2） $\displaystyle\int_1^3 (|x-2|+|x-4|)\,dx.$

*（3） $\displaystyle\int_0^2 |x(1-x)|\,dx.$ （4） $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}.$

（5） $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{x^2-16}.$ （6） $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

*(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2}$.　　(8) $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x(x^2-1)}$.

(9) $\displaystyle\int_0^1 (3x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$.　　(10) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} x^2\sqrt{x+2}\,dx$.

(11) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$.　　(12) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$.

(13) $\displaystyle\int_1^{1+\sqrt{2}} \frac{2}{\sqrt{x^2-2x+3}}\,dx$.　　(14) $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

(15) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$.　　(16) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx$.

(17) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 2x \cos x\,dx$.　　(18) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$.

(19) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$.　　(20) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

(21) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^5 x\,dx$.　　(22) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx$.

(23) $\displaystyle\int_{-1}^1 e^{2x}\,dx$.　　(24) $\displaystyle\int_0^{a} \cosh x\,dx$.

(25) $\displaystyle\int_0^2 xe^{-x}\,dx$.　　(26) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

(27) $\displaystyle\int_1^2 \log x\,dx$.　　(28) $\displaystyle\int_0^1 \tan^{-1} x\,dx$.

***問 2.** 例 7 にならって，つぎの不等式を証明せよ:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\log n \qquad (n=2, 3, \cdots).$$

***問 3.** $\alpha>0$ のとき，例 7 にならって，つぎの不等式を証明せよ:

(1) $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}<1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$.

(2) $\displaystyle\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}<\int_1^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$.

問 4. 例 8 にならって，つぎの極限値を求めよ:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-1^2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-2^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}\right)$.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2}+\frac{n}{n^2+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)$.

§ 42. 平面図形の面積

1. 2曲線間の面積 定理 38.4 (136 ページ)によって, $f(x)$ が $[a, b]$ で連続で $f(x) \geqq 0$ ならば, 定積分:

$$A=\int_a^b f(x)\,dx$$

は, 曲線: $y=f(x)$ と直線: $x=a$, 直線: $x=b$ および x-軸 によってかこまれた部分の面積を表す. このことから, つぎの定理が, ただちに, えられる:

定理 42.1 $f(x)$, $g(x)$ が, ともに, $[a, b]$ で連続で, $f(x) \geqq g(x)$ のとき,

曲線: $y=f(x)$, $y=g(x)$,

直線: $x=a$, $x=b$

によってかこまれた部分(図 42.1)の面積 A は,

$$(42.1) \quad A=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}\,dx.$$

(2 曲線間の面積表示)

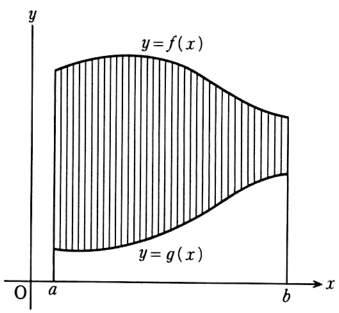


図 42.1

例 1. 放物線: $y^2=x$ と直線: $y=x-2$ とでかこまれた部分の面積 A (図 42.2).

放物線: $y^2=x$ と直線: $y=x-2$ の交点の x 座標は, 方程式:

$$(x-2)^2=x$$

を解くことによって, $x=1$, 4.

面積を求める図形を, 直線; $x=1$ によって 2 つの部分にわけて, 左側の部分では, $y=\sqrt{x}$ と $y=-\sqrt{x}$ の間の部分の面積を, 右側の部分では, $y=\sqrt{x}$ と $y=x-2$ の間の部分の面積を求めればよい.

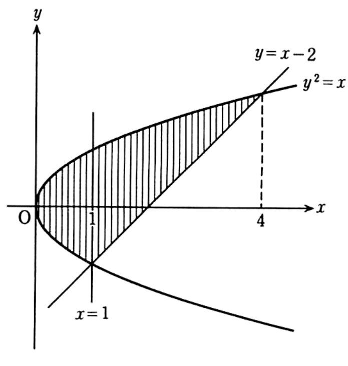


図 42.2

$$\therefore \quad A=\int_0^1 \{\sqrt{x}-(-\sqrt{x})\}\,dx+\int_1^4 \{\sqrt{x}-(x-2)\}\,dx$$

$$=\left[2\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1+\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{2}x^2-2x\right)\right]_1^4$$

$$=\left(\frac{4}{3}-0\right)+\left\{\left(\frac{2}{3}4^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}4^2+2\cdot 4\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right\}=\frac{9}{2}.$$

あるいは，つぎのようにしてもよい：

x を y の関数と考えて，直線：$x=y+2$ と放物線：$x=y^2$ とでかこまれた部分の面積 A (図 42.3)を求める．そのとき，交点の y 座標は，方程式：

$$y^2=y+2$$

を解くことによって，$y=-1,\ 2$.

$$\therefore \quad A=\int_{-1}^2 \{(y+2)-y^2\}\,dy$$

$$=\left[\frac{1}{2}y^2+2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-1}^2=\frac{9}{2}.$$

(例1終)

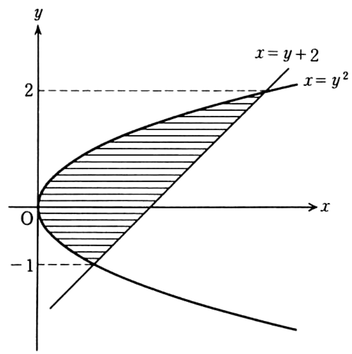


図 42.3

2. パラメター表示された関数

例 2. サイクロイド (ころがる車輪の周上の1点の軌跡)：

$$x=a(t-\sin t),\qquad y=a(1-\cos t)\qquad (0\leqq t\leqq 2\pi;\ a>0)$$

と x-軸とでかこまれた部分の面積 A (図 42.4).

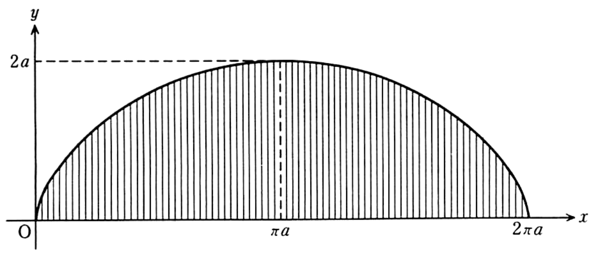


図 42.4

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t),\qquad \begin{cases} t: & 0\sim 2\pi,\\ x: & 0\sim 2\pi a\end{cases}$$

であるから，置換積分法によって，

$$A=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} y\frac{dx}{dt}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt$$
$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt$$
$$=a^2\left[t-2\sin t+\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi}$$
$$=a^2\left\{\left(2\pi+\frac{2\pi}{2}\right)-0\right\}=3\pi a^2.$$

（例 2 終）

3. 極方程式で表された関数　曲線が，極座標 (r,θ) について，極方程式：

(42. 2)　　$r=f(\theta)\quad(\alpha\leqq\theta\leqq\beta)$

によって表されているとき，2 つの半直線：

(42. 3)　　$\theta=\alpha,\qquad \theta=\beta$

と曲線(42.2)式によってかこまれた部分(図 42.5)の面積 A を求める公式をみちびこう．

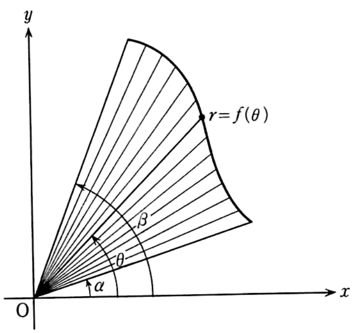


図 42.5

θ の区間 $[\alpha,\beta]$ の有限個の小区間への任意の分割を Δ とし，

$$[\theta,\theta+\Delta\theta]$$

を Δ の任意の小区間とする．この小区間での近似面積としては，任意の $\varphi\in[\theta,\theta+\Delta\theta]$ に対して，扇形 OPQ (図 42.6)の面積：

$$\pi\rho^2\cdot\frac{\Delta\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}f(\varphi)^2\Delta\theta\quad(\rho=f(\varphi))$$

を採用できる．したがって，近似和 $S[\Delta,\varphi]$ は，

$$S[\Delta,\varphi]=\frac{1}{2}\sum_{\Delta}f(\varphi)^2\Delta\theta$$

$\left(\sum_{\Delta}\right.$ は Δ のすべての小区間についての和$\left.\right)$.

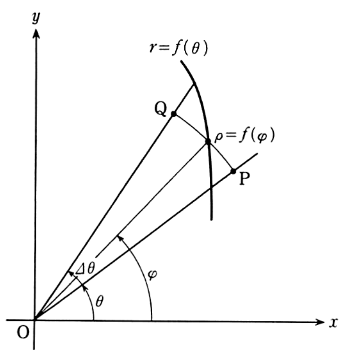


図 42.6

ここで，$f(\theta)$ は $[\alpha,\beta]$ で連続であると仮定し，

分割 Δ をかぎりなく細かくすれば，定理 38.3 (135 ページ) によって，$S[\Delta, \varphi]$ は，つぎの(42.4)式の積分にかぎりなく近づく．したがって，つぎの定理がえられる:

> **定理 42.2** $f(\theta)$ は $[\alpha, \beta]$ で連続であるとき，曲線 (42.2) と 2 つの半直線 (42.3) によってかこまれた部分の面積は，
>
> (42.4) $$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f(\theta)^2 d\theta.$$ **(極方程式による面積の積分表示)**

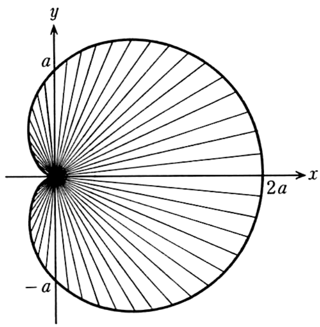
例 3. カージオイド (ハート形):

$$r=a(1+\cos\theta) \qquad (a>0)$$

によってかこまれた部分 (図 42.7) の面積 A.

極方程式による面積の積分表示によって，

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\,d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\left[\theta+2\sin\theta+\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi}$$
$$=\frac{a^2}{2}\left\{\left(2\pi+\frac{2\pi}{2}\right)-0\right\}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$ (例 3 終)



$r=a(1+\cos\theta)$ $(a>0)$

図 42.7

問 1. つぎの曲線によってかこまれた部分の面積を求めよ:

(1) $y=x^2$, $y=8-x^2$.

(2) $y=x^2$, $y^2=8x$.

(3) $y=x^4$, $y=x$.

(4) $y=2^x$, $y=x+1$.

(5) $y=x\log(1+x)$, $y=x$.

(6) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$, $x+y=a$ $(a>0)$.

(7) $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$, 直線: $x=0$, $x=b$ $(b>0)$, $y=0$.

(8) $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$, $y=0$.

(9) $y=\sin x$, $y=\cos x$ $\left(-\dfrac{3\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$.

問 2. 定理 42.1 を利用して，だ円：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ の内部の面積を求めよ．

問 3. だ円のパラメター表示：

$$x=a\cos t,\qquad y=b\sin t\qquad\qquad (a>0,\ b>0)$$

を用いて，このだ円の内部の面積を求めよ．

問 4. アステロイド：

$$x=a\cos^3 t,\qquad y=a\sin^3 t\qquad (0\leqq t\leqq 2\pi;\ a>0)$$

の内部の面積を求めよ．

問 5. レムニスケート：

$$r^2=2a^2\cos 2\theta\qquad\qquad (a>0)$$

によってかこまれた部分の面積を求めよ．

問 6. $r=a\sec^2\dfrac{\theta}{2}$ $(a>0)$ と半直線：$\theta=0,\ \theta=\alpha$ $(0<\alpha<\pi)$ によってかこまれた部分の面積を求めよ．

§ 43. 立体の体積

1. 断面積による体積表示

定理 43.1 $[a, b]$ を空間の x-軸上の区間とするとき，$x\in[a, b]$ での，x-軸に垂直な平面による断面積が，$A(x)$ であたえられるような立体（図 43.1）の体積 V は，$A(x)$ が連続ならば，

(43.1) $V=\displaystyle\int_a^b A(x)\,dx.$

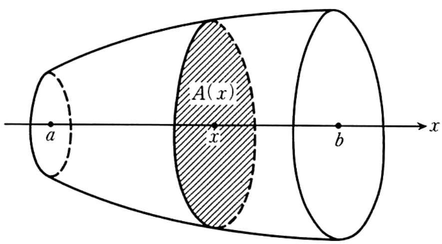


図 43.1

（断面積による体積の積分表示）

証明 定理 38.4 の証明（136 ページ）と同じである．$[a, b]$ の分割：

$$\varDelta:\quad a=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_{n-1}<a_n=b$$

に対して，

$$M_i=\max_{a_{i-1}\leqq x\leqq a_i} A(x),\qquad m_i=\min_{a_{i-1}\leqq x\leqq a_i} A(x)\qquad (i=1,\cdots,n)$$

とし，

$$S[\varDelta]=\sum_{i=1}^{n} M_i h_i,\qquad s[\varDelta]=\sum_{i=1}^{n} m_i h_i$$

とすれば，$S[\varDelta]$，$s[\varDelta]$ は，ともに，近似和であって，

$$s[\varDelta]\leqq V\leqq S[\varDelta].$$

一方，$A(x)$ は連続関数であるから，定理 38.2 (135 ページ) によって，

$$\int_a^b A(x)\,dx=\lim_{\delta[\varDelta]\to 0} s[\varDelta]=\lim_{\delta[\varDelta]\to 0} S[\varDelta]$$

$$(\delta[\varDelta]=\max_{1\leqq i\leqq n}(a_i-a_{i-1})).$$　　(証明終)

例 1.　半直円柱：

$$\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqq a^2,\ z\geqq 0\ (a>0)\}$$

が，xy-平面と平面：$z=x$ とによって切りとられる部分 (図 43.2) の体積 V を 2 通りの方法で求めよう．

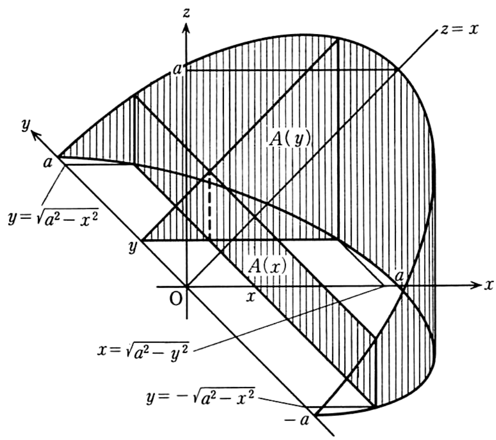


図 43.2

この図形の x-軸に垂直な平面による切り口は長方形で，その面積 $A(x)$ は，

$$A(x)=2\sqrt{a^2-x^2}\cdot x\qquad\text{(図 43.2)}.$$

したがって，定理 43.1 によって，

$$\begin{aligned}V&=\int_0^a A(x)\,dx\\&=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\,dx\\&=\left[-\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3.\end{aligned}$$

つぎに，この図形の y-軸に垂直な平面による切り口は直角2等辺三角形で，その面積 $A(y)$ は，

$$A(y)=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y^2}\cdot\sqrt{a^2-y^2}=\frac{a^2-y^2}{2}\qquad(-a\leqq y\leqq a;\ \text{図 }43.2).$$

したがって，定理 43.1 によって，

$$V=\int_{-a}^{a}A(y)\,dy=\int_{-a}^{a}\frac{a^2-y^2}{2}\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-a}^{a}=\frac{1}{2}\left\{\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-\left(-a^3+\frac{1}{3}a^3\right)\right\}=\frac{2}{3}a^3.$$ （例1終）

2. 回転体の体積

定理 43.2 $[a,b]$ で $f(x)$ が連続であるとき，曲線：

$$y=f(x)\qquad(a\leqq x\leqq b)$$

を x-軸のまわりに1回転してえられる回転面と，$x=a$，$x=b$ をとおって x-軸に垂直な2平面とでかこまれた回転体（図 43.3）の体積 V は，

$$(43.\ 2)\qquad V=\pi\int_a^b f(x)^2\,dx.$$

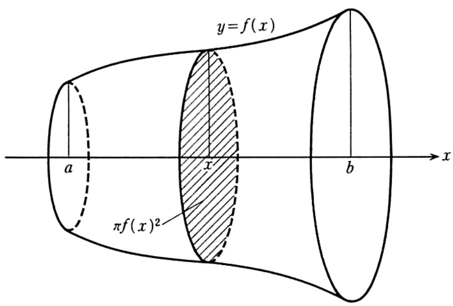


図 43.3

（回転体の体積の積分表示）

証明　この回転体の，$x\in[a,b]$ での断面積 $A(x)$ が，

$$A(x)=\pi f(x)^2\qquad(\text{半径 } f(x) \text{ の円の面積})$$

であたえられることに注意すれば，定理 43.1 からえられる．　（証明終）

例 2.　半径 a の半円：

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\qquad(a>0)$$

と x-軸によってかこまれた部分（図 43.4）を，x-軸のまわりに1回転してできる立体（半径 a の球）の体積 V.

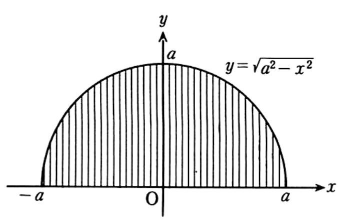


図 43.4

公式 (43.2) によって，

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(\sqrt{a^2-x^2})^2\,dx=\pi\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\,dx$$
$$=\pi\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}$$
$$=\pi\left\{\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-\left(-a^3+\frac{1}{3}a^3\right)\right\}=\frac{4}{3}\pi a^3.$$ （例 2 終）

問 1.　定理 43.2 を利用して，つぎの図形を x-軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ:

（1）　直線: $y=ax$ $(a>0)$, 直線: $x=b$ $(b>0)$, および x-軸によってかこまれた部分.

（2）　半だ円: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y\geqq 0$ $(a>0,\ b>0)$ と x-軸によってかこまれた部分.

（3）　曲線: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$, x-軸および y-軸によってかこまれた部分.

（4）　曲線: $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ と x-軸によってかこまれた部分.

（5）　曲線: $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$,　直線: $x=0$,　直線: $x=b$ および x-軸によってかこまれた部分.

（6）　サイクロイド: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ と x-軸によってかこまれた部分.

（7）　曲線: $y=e^{-x}$, 直線: $x=0$ および x-軸の正の部分によってかこまれた無限にのびた部分.

問 2.　定理 43.1 を利用して，つぎの立体の体積を求めよ:

（1）　だ円体: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1$　　$(a,\ b,\ c>0)$.

（2）　曲面: $\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{x}{a}$ $(a,b,c>0)$ と平面: $x=a$ によってかこまれた部分.

§ 44.　曲線の長さと回転面の面積

1.　曲線の長さ　　$[a,b]$ 上で定義された曲線: $y=f(x)$ の長さ L を求めよう.

$[a,b]$ の任意の小区間への分割を $\varDelta$ とし,

$$[x,\ x+\varDelta x]$$

を $\varDelta$ の任意の小区間とする．曲線: $y=f(x)$ と分割 $\varDelta$ に対して，図 44.1 のような屈折線 $P_\varDelta$ をつくる．小区間 $[x, x+\varDelta]$ に対応する $P_\varDelta$ の部分(線分)の長さ $\varDelta s$ は(図 44.2)，$f(x+\varDelta x)-f(x)=\varDelta y$ とおくとき，

$$\varDelta s=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta x}\right)^2}\,\varDelta x=*.$$

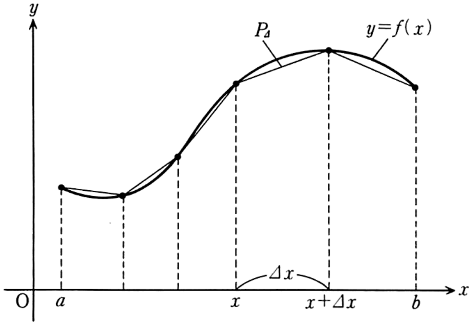


図 44.1

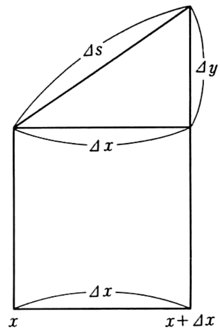


図 44.2

ここで，$f(x)$ は $[a, b]$ で微分可能であると仮定して，$[x, x+\varDelta x]$ で平均値の定理 (46 ページ)を用いれば，

$$\frac{\varDelta y}{\varDelta x}=f'(\xi) \qquad (x<\xi<x+\varDelta x)$$

をみたす ξ が存在する．

$$\therefore \qquad *=\sqrt{1+f'(\xi)^2}\,\varDelta x.$$

したがって，$P_\varDelta$ の長さを $l[\varDelta]$ とすれば，

$$l[\varDelta]=\sum_\varDelta \varDelta s=\sum_\varDelta \sqrt{1+f'(\xi)^2}\,\varDelta x.$$

ここで，$f'(x)$ は $[a, b]$ で連続であると仮定して，分割 $\varDelta$ をかぎりなく細かくすれば，定理 38.3 (135 ページ)によって，近似和 $l[\varDelta]$ は，つぎの(44.1)式の積分にかぎりなく近づく．したがって，つぎの定理がえられる:

定理 44.1　$f(x)$ が $[a, b]$ で連続な導関数をもつとき，$[a, b]$ における曲線: $y=f(x)$ の長さ L は，

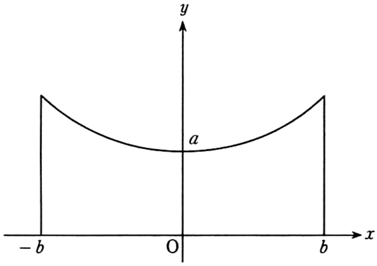
(44. 1)　　$$L=\int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx=\int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

(曲線の長さの積分表示)

例 1.　けんすい線(ひもが重力の作用で自然にたれる形):

$$y=a\cosh\frac{x}{a}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right) \qquad (a>0)$$

の $0\leqq x\leqq b$ に対応する部分の長さ L (図 44.3).



$y=a\cosh\frac{x}{a}$

図 44.3

$$y'=\sinh\frac{x}{a}.$$

ゆえに, 公式: $\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$ に注意すれば,

$$\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}=\sqrt{\cosh^2\frac{x}{a}}=\cosh\frac{x}{a}.$$

したがって, 曲線の長さの積分表示(44.1)によって,

$$L=\int_0^b\sqrt{1+y'^2}\,dx=\int_0^b\cosh\frac{x}{a}\,dx$$
$$=\left[a\sinh\frac{x}{a}\right]_0^b=a\sinh\frac{b}{a}=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}\right). \qquad \text{(例 1 終)}$$

2.　パラメター表示された曲線の長さ　　パラメター表示された曲線:

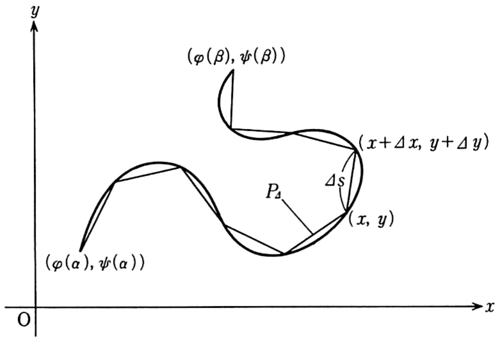
(44.2)　　$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t) \qquad (\alpha\leqq t\leqq\beta)$

の長さ L を求める公式をみちびこう.

$[\alpha,\beta]$ の任意な小区間への分割を $\varDelta$ とし,

$$[t,\ t+\varDelta t]$$

を $\varDelta$ の任意の小区間とする. 曲線 (44.2)と分割 $\varDelta$ に対して, つぎのページの図 44.4 のような屈折線 $P_\varDelta$ をつくる.



$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$
$$x+\varDelta x=\varphi(t+\varDelta t),\quad y+\varDelta y=\psi(t+\varDelta t)$$

図 44.4

小区間 $[t, t+\varDelta t]$ に対応する $P_\varDelta$ の部分(線分)の長さ $\varDelta s$ は,

$$\varDelta x=\varphi(t+\varDelta t)-\varphi(t),\qquad \varDelta y=\psi(t+\varDelta t)-\psi(t)$$

とおくとき,

$$\varDelta s=\sqrt{(\varDelta x)^2+(\varDelta y)^2}=\sqrt{\left(\frac{\varDelta x}{\varDelta t}\right)^2+\left(\frac{\varDelta y}{\varDelta t}\right)^2}\varDelta t=*.$$

ここで, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で微分可能であると仮定して, $[t, t+\varDelta t]$ で平均値の定理(46 ページ)を用いれば,

$$\frac{\varDelta x}{\varDelta t}=\varphi'(u),\qquad \frac{\varDelta y}{\varDelta t}=\psi'(v)\qquad (t<u,\ v<t+\varDelta t)$$

をみたす u, v が存在する.

$$\therefore\qquad *=\sqrt{\varphi'(u)^2+\psi'(v)^2}\,\varDelta t.$$

したがって, $P_\varDelta$ の長さを $l[\varDelta]$ とすれば,

$$l[\varDelta]=\sum_\varDelta \varDelta s=\sum_\varDelta \sqrt{\varphi'(u)^2+\psi'(v)^2}\,\varDelta t.$$

ここで, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で連続であると仮定して, 分割 $\varDelta$ をかぎりなく細かくすれば, 定理 38.3 (135ページ) によって, 近似和 $l[\varDelta]$ は, つぎの(44.3)式の積分にかぎりなく近づく. したがって, つぎの定理がえられる:

定理 44.2　$\varphi(t)$, $\psi(t)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続な導関数をもつとき, パラメター表示された曲線 (44.2) の長さ L は,

(44.3)　$$L=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,dt=\int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt.$$

(パラメター表示された曲線の長さの積分表示)

例 2. サイクロイド:

$$x=a(t-\sin t), \quad y=a(1-\cos t) \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi;\ a>0)$$

の長さ L (図 44.5).

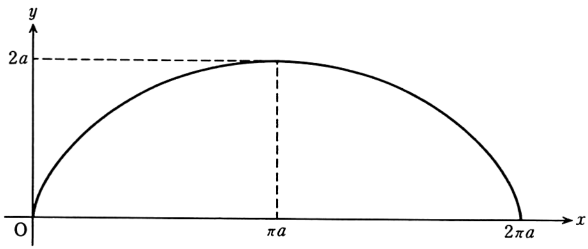


図 44.5

$$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t), \quad \frac{dy}{dt}=a\sin t$$

であるから, 公式(44.3)によって,

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)}\,dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt \\
&= 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt \qquad \left(\because \quad [0, 2\pi] \text{ で } \sin\frac{t}{2} \geqq 0\right) \\
&= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= 2a\{2-(-2)\} = 8a.
\end{aligned}$$

(例 2 終)

3. 極方程式で表された曲線の長さ 極方程式で表された曲線:

(44.4) $$r=f(\theta) \qquad (\alpha \leqq \theta \leqq \beta)$$

の長さ L を求める公式をみちびこう.

$[\alpha, \beta]$ の任意な小区間への分割を $\varDelta$ とし,

$$[\theta, \theta+\varDelta\theta]$$

を $\varDelta$ の任意の小区間とする. 前項と同様の方法で, 曲線(44.4)と分割 $\varDelta$ に対し

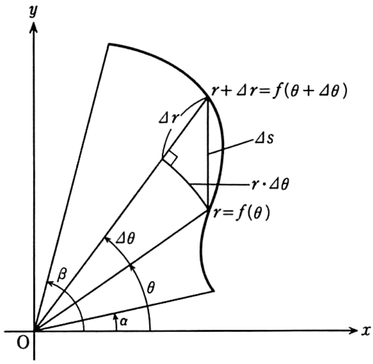


図 44.6

て，屈折線 P_Δ をつくる．小区間 $[\theta, \theta+\Delta\theta]$ に対応する P_Δ の部分(線分)の長さ Δs は(図 44.6)，

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(r\cdot\Delta\theta)^2+(\Delta r)^2}=\sqrt{r^2+\left(\frac{\Delta r}{\Delta\theta}\right)^2}\,\Delta\theta=*.$$

ここで，$f(\theta)$ は $[\alpha, \beta]$ で微分可能であると仮定して，$[\theta, \theta+\Delta\theta]$ で平均値の定理 (46 ページ)を用いれば，

$$\frac{\Delta r}{\Delta\theta}=f'(\varphi) \qquad (\theta<\varphi<\theta+\Delta\theta)$$

をみたす φ が存在する．

$$\therefore \qquad *=\sqrt{f(\theta)^2+f'(\varphi)^2}\,\Delta\theta.$$

したがって，P_Δ の長さを $l[\Delta]$ とすれば，

$$l[\Delta]\fallingdotseq\sum_\Delta \Delta s=\sum_\Delta \sqrt{f(\theta)^2+f'(\varphi)^2}\,\Delta\theta.$$

ここで，$f'(\theta)$ は $[\alpha, \beta]$ で連続であると仮定して，分割 Δ をかぎりなく細かくすれば，定理 38.3 (135 ページ)によって，近似和 $l[\Delta]$ は，つぎの(44.5)式の積分にかぎりなく近づく．したがって，つぎの定理がえられる:

定理 44.3 $f(\theta)$ が $[\alpha, \beta]$ で連続な導関数をもつとき，極方程式で表された曲線 (44.4)の長さ L は，

$$(44.5) \qquad L=\int_\alpha^\beta \sqrt{f(\theta)^2+f'(\theta)^2}\,d\theta=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta.$$

(極方程式表示された曲線の長さの積分表示)

例 3. ハート形:

$$r=a(1+\cos\theta)\qquad (a>0)$$

の全長 L (図 44.7).

$$\frac{dr}{d\theta}=-a\sin\theta$$

であるから, $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき,

$$\begin{aligned}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}&=\sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\\&=a\sqrt{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}\\&=a\sqrt{2(1+\cos\theta)}\\&=a\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=2a\cos\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

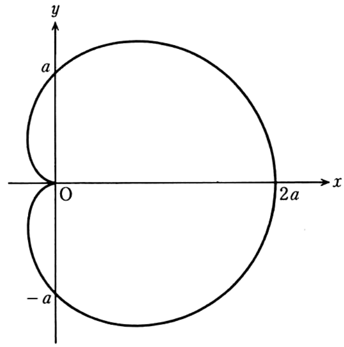


図 44.7

全長 L は, $0\leqq\theta\leqq\pi$ に対応する部分の長さの 2 倍であるから, 公式(44.5)によって,

$$\begin{aligned}L&=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta\\&=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=4a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8a.\end{aligned}$$
(例 3 終)

4. 回転面の面積† 曲線:

(44.6) $$y=f(x)\qquad (a\leqq x\leqq b;\ f(x)\geqq 0)$$

を x-軸のまわりに回転してえられる回転面の面積 A を求める公式をみちびこう (図 44.8).

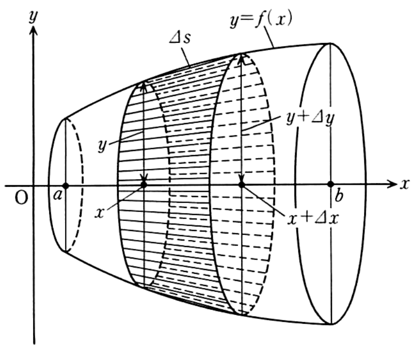


図 44.8

† この項は省略して, 先にすすんでもよい.

$[a, b]$ の任意の小区間への分割を Δ とし, $[x, x+\Delta x]$ を Δ の任意の小区間とする. まず, 曲線: $y=f(x)$ 上の 2 点: (x, y), $(x+\Delta x,\ y+\Delta y)$ を結ぶ線分を x-軸のまわりに回転してえられる直円錐台(図 44.8)の側面積 ΔA を求めよう.

$$\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

とおき, 半径 l, 円弧の長さ $2\pi y$ の扇形の開きを θ とするとき(図 44.9),

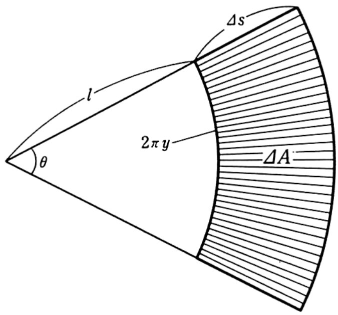


図 44.9

$$\begin{aligned}\Delta A&=\pi(l+\Delta s)^2\cdot\frac{\theta}{2\pi}-\pi l^2\cdot\frac{\theta}{2\pi}\\&=\frac{1}{2}\{(l+\Delta s)^2-l^2\}\theta\\&=l\theta\cdot\Delta s+\frac{1}{2}(\Delta s)^2\theta\fallingdotseq l\theta\cdot\Delta s=*.\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{2\pi y}{2\pi l}=\frac{y}{l}$$

であるから,

$$*=l\cdot 2\pi\frac{y}{l}\cdot\Delta s=2\pi y\,\Delta s=2\pi y\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\,\Delta x.$$

求める表面積 A は, この ΔA の, 分割 Δ についての総和の極限値であるから, 1 項と同様にして, つぎの定理がえられる:

定理 44.4　$f(x)$ は $[a, b]$ で連続な導関数をもつとき, 曲線 (44.6) を x-軸のまわりに回転してえられる回転面の面積 A は,

(44.7)
$$A=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\qquad (y=f(x)).$$

(回転面の表面積の積分表示)

例 4. 半円: $y=\sqrt{a^2-x^2}$ $(-a\leqq x\leqq a;\ a>0)$
を x-軸のまわりに1回転してえられる回転面の表面積(半径 a の球の表面積)を求めよう.

$$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

$$\therefore \quad y\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=a.$$

したがって, 回転面の表面積の積分表示(44.7)によって,

$$A=2\pi\int_{-a}^{a}y\sqrt{1+y'^2}\,dx=2\pi\int_{-a}^{a}a\,dx=2\pi a\Big[\,x\,\Big]_{-a}^{a}=4\pi a^2. \qquad \text{(例 4 終)}$$

問 1. 公式 (44.1)を用いて, つぎの曲線の長さを求めよ:

(1) 円: $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$.

(2) 放物線: $y^2=4x$ の $(0,0)$ から $(1,2)$ までの部分.

(3) $y=x^{\frac{3}{2}}$ の $0\leqq x\leqq 1$ に対応する部分.

(4) $y=\log\cos x$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ に対応する部分.

問 2. 公式 (44.3)を用いて, つぎの曲線の長さを求めよ $(a>0)$:

(1) 円: $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$.

(2) 伸開線: $x=a(\cos t+t\sin t)$, $y=a(\sin t-t\cos t)$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{l}{a}\right)$.

(3) アステロイド: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi;\ a>0)$.

問 3. 公式 (44.5)を用いて, つぎの曲線の長さを求めよ:

(1) 円: $r=a\sin\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi;\ a>0)$.

(2) アルキメデスのらせん: $r=a\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\alpha;\ a>0)$.

(3) 等角らせん: $r=a^{\theta}$ $(-\infty<\theta\leqq 0;\ a>1)$.

問 4. 公式(44.7)を用いて,つぎの曲線を x-軸のまわりに1回転してできる回転面の表面積を求めよ:

(1) 線分: $y=ax$ $(0\leqq x\leqq b:\ a>0,\ b>0)$.

(2) 曲線: $y=x^3$ $(0\leqq x\leqq 1)$.

(3) 放物線: $y=\sqrt{x}$ $(0\leqq x\leqq 1)$.

(4) 曲線: $y=\sin x$ $(0\leqq x\leqq\pi)$.

(5) けんすい線: $y=a\cosh\dfrac{x}{a}$ $(0\leqq x\leqq b;\ a>0,\ b>0)$.

11

広義の積分

§45. 有界でない関数の積分

1. 広義の積分　　$f(x)$は，高々 $c\ (\in(a, b))$ を除いて $[a, b]$ で定義され，c の近くを除いて有界で，c の近くで有界でない場合，

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta'\to+0}\int_a^{c-\delta'} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to+0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx$$

によって，定積分を定義する(図 45.1)．

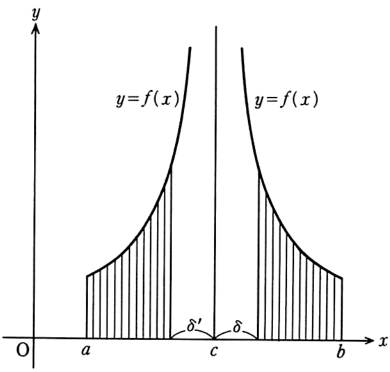


図 45.1

本来の，有限区間で有界な関数の積分に対応して，このように，有界でない関数の積分，または，つぎの節で述べる無限区間での積分，などを総称して，**広義の積分**，または**仮性積分**という．これに対して，いままでの積分を**狭義の積分**ということがある．

2. 具体例

例 1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \qquad (\alpha>0)^\dagger.$

$\alpha\neq 1$ のとき,

$$\int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\Big[x^{1-\alpha}\Big]_\delta^1$$
$$=\frac{1}{1-\alpha}(1-\delta^{1-\alpha}) \qquad (\text{図 } 45.2).$$

ここで,

$$\lim_{\delta\to+0}\delta^{1-\alpha}=\begin{cases}0 & (1-\alpha>0),\\ \infty & (1-\alpha<0).\end{cases}$$

(45.1) $\displaystyle \therefore \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x^\alpha}$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\left(1-\lim_{\delta\to+0}\delta^{1-\alpha}\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha} & (0<\alpha<1),\\ \infty & (\alpha>1).\end{cases}$$

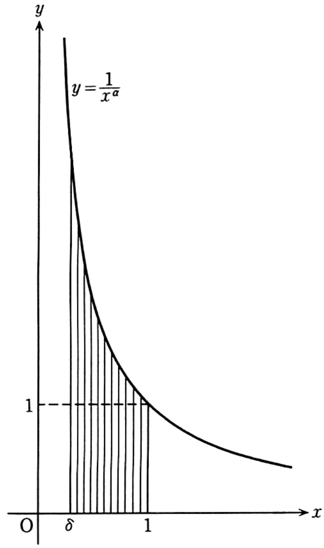


図 45.2

$\alpha=1$ のときは,

(45.2) $$\int_0^1 \frac{dx}{x}=\lim_{\delta\to+0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x}$$
$$=\lim_{\delta\to+0}\Big[\log|x|\Big]_\delta^1$$
$$=\lim_{\delta\to+0}(-\log\delta)=\infty.$$

(45.1)式と(45.2)式によって,

(45.3) $$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha} & (0<\alpha<1),\\ \text{存在しない} & (\alpha\geqq 1);\end{cases}$$

ここで, 広義の積分の定義において, 有限な極限値が存在しないときは, **積分が存在しない**という. (例1終)

3. 判定条件

前項の結果 (45.3)は, しばしば, 広義の積分が存在するかどうかの判定条件に利用される. 実際, つぎの定理がなりたつ:

† $\alpha\leqq 0$ の場合には, 狭義の定積分が存在する.

定理 45.1 $f(x)$ が $(a, b]$ で連続であるとき，

(45.4) $$|f(x)| \leqq \frac{M}{(x-a)^{\alpha}} \qquad (a<x\leqq b;\ 0<\alpha<1)$$

をみたす定数 α，M が存在すれば (図 45.3)，広義の積分:

(45.5) $$\int_a^b f(x)\,dx \equiv \lim_{\delta\to+0}\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

は存在する. **(広義の積分の存在判定条件)**

また，

(45.6) $$f(x) \geqq \frac{m}{(x-a)^{\alpha}} \quad \text{または} \quad f(x) \leqq -\frac{m}{(x-a)^{\alpha}}$$

$$(a<x\leqq b;\ \alpha\geqq 1)$$

をみたす定数 α，$m>0$ が存在すれば，広義の積分(45.5)は存在しない.

(広義の積分の不存在判定条件)

証明[†] 十分小さい任意の正数 δ に対して，$f(x)$ は $[a+\delta, b]$ で連続であるから，積分:

$$\int_{a+\delta}^b f(x)\,dx$$

は存在する(積分可能である).

一方，定理の仮定(45.4)によって(図 45.3)，

$$\left|\int_a^{a+\delta} f(x)\,dx\right|$$

$$\leqq \int_a^{a+\delta} |f(x)|\,dx$$

$$\leqq M\int_a^{a+\delta}\frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}$$

$$(\because\ (45.4)\text{式})$$

$$= M\int_0^{\delta}\frac{du}{u^{\alpha}}$$

$$\left(u=x-a,\ \frac{du}{dx}=1\right).$$

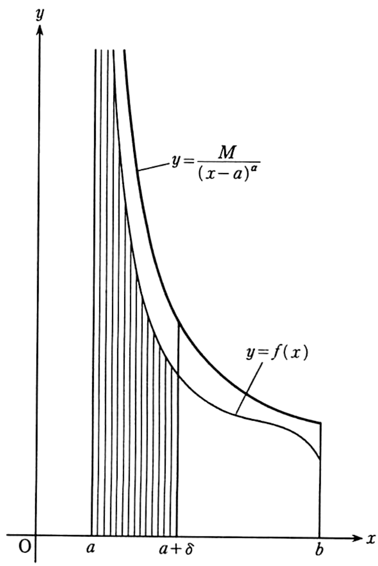


図 45.3

ここで，前項の結果(45.3)によって，右辺の積分は，$0<\alpha<1$ のとき，δ を十分小さくとるかぎり，いくらでも小さくできる. したがって，広義の積分(45.5)は存在する.

後半の証明も同様である. (証明終)

† 厳密な証明ではないが，証明から定理の意味をよく理解されたい.

例 2.

(45.7) $$\int_0^1 \frac{1}{e^x x^\alpha}\,dx = \lim_{\delta\to+0}\int_\delta^1 \frac{1}{e^x x^\alpha}\,dx.$$

$$0<\frac{1}{e^x x^\alpha}\leqq\frac{1}{x^\alpha} \qquad (0<x\leqq 1;\ 0<\alpha<1)$$

であるから，定理 45.1 の存在判定条件によって，$0<\alpha<1$ のとき，広義の積分 (45.7) は存在する．

また，

$$\frac{1}{e^x x^\alpha}\geqq\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{x^\alpha} \qquad (0<x\leqq 1;\ \alpha\geqq 1)$$

であるから，定理 45.1 の不存在判定条件によって，$\alpha\geqq 1$ のとき，広義の積分 (45.7) は存在しない． (例 2 例)

$\alpha\leqq 0$ のときは，(45.7) 式は狭義の積分であって，もちろん，積分は存在する．

問 1. つぎの広義の積分の値を求めよ:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{0.9999}}.$　　(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}.$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$　　*(4) $\displaystyle\int_0^1 \log x\,dx.$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}.$　　(6) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$

(7) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx.$　　(8) $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{dx}{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

問 2. 定理 45.1 を利用して，積分:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha(1-x)^\beta}\,dx$$

が存在するような α と β の値の範囲を決定せよ．

§46. 無限積分

1. 無限積分　いままで定義してきた積分は，積分の区間が，つねに有限であった．積分区間が無限にのびた場合を考えよう．

まず，区間 $[a,\infty)$ 上で有界な関数 $f(x)$ の積分を

(46.1) $$\int_a^\infty f(x)\,dx \equiv \lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)\,dx$$

によって定義する (図 46.1(つぎのページ))．

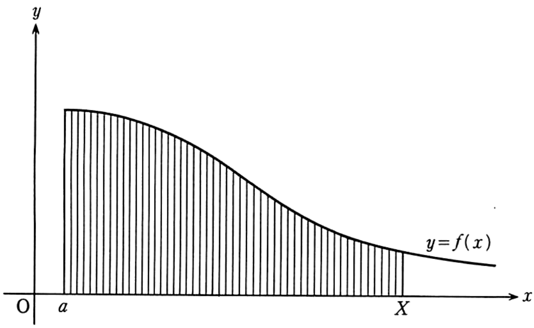


図 46.1

$(-\infty, a]$ 上での $f(x)$ の積分も，同様に，

(46．2) $$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx \equiv \lim_{X\to-\infty} \int_{X}^{a} f(x)\,dx$$

によって定義される．

全区間 $(-\infty, \infty)$ 上での $f(x)$ の積分は，

(46．3) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \equiv \lim_{X\to\infty,\, X'\to-\infty} \int_{X'}^{X} f(x)\,dx$$

によって定義される（図 46.2）．

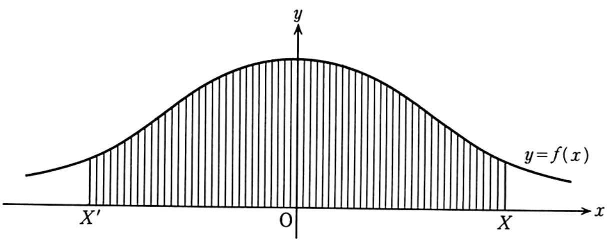


図 46.2

広義の積分 (46.1), (46.2), (46.3) を，いずれも，**無限積分**とよぶ．

2．具 体 例

例 1. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

$\alpha \neq 1$ のとき，

$$\int_{1}^{X} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\Big[x^{1-\alpha}\Big]_{1}^{X} = \frac{1}{1-\alpha}(X^{1-\alpha}-1) \qquad \text{（図 46.3）.}$$

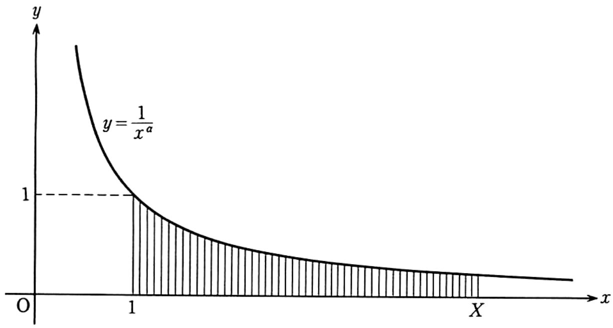


図 46.3

ここで,

$$\lim_{X\to\infty} X^{1-\alpha}=\begin{cases}0 & (1-\alpha<0),\\ \infty & (1-\alpha>0).\end{cases}$$

(46.4) $$\therefore \quad \int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{X\to\infty}\int_1^{X}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}(X^{1-\alpha}-1)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1),\\ \infty & (\alpha<1).\end{cases}$$

$\alpha=1$ のときは,

(46.5) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{X\to\infty}\int_1^{X}\frac{dx}{x}=\lim_{X\to\infty}\Big[\log|x|\Big]_1^X=\lim_{X\to\infty}\log X=\infty.$$

(46.4)式と(46.5)式によって,

(46.6) $$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha-1} & (\alpha>1),\\ \text{存在しない} & (\alpha\leqq 1).\end{cases}$$

(例1終)

3. 判定条件 前項の結果(46.6)は,無限積分が存在するかどうかの判定条件に利用される.実際,つぎの定理がなりたつ:

定理 46.1 $f(x)$ が $[a,\infty)$ $(a>0)$ で連続であるとき,

(46.7) $$|f(x)|\leqq\frac{M}{x^{\alpha}} \qquad (a\leqq x<\infty;\ \alpha>1)$$

をみたす定数 α, M が存在すれば(図 46.4 (つぎのページ)),無限積分:

(46．8)　　$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx \equiv \lim_{X\to\infty}\int_a^X f(x)\,dx$$

は存在する．　　**(無限積分の存在判定条件)**

また，

(46．9)　　$$f(x) \geqq \frac{m}{x^{\alpha}} \quad \text{または} \quad f(x) \leqq -\frac{m}{x^{\alpha}} \qquad (a \leqq x < \infty;\ \alpha \leqq 1)$$

をみたす定数 α，$m>0$ が存在すれば，無限積分(46.8)は存在しない．

(無限積分の不存在判定条件)

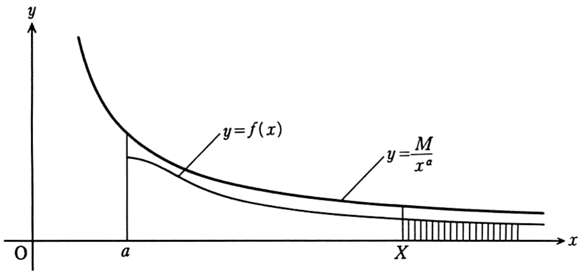


図 46.4

証明[†]　十分大きい任意の X に対して，$f(x)$ は $[a, X]$ で連続であるから，積分:

$$\int_a^X f(x)\,dx$$

は存在する．

一方，定理の仮定(46.7)によって(図 46.4)，

$$\left|\int_X^{\infty} f(x)\,dx\right| \leqq \int_X^{\infty} |f(x)|\,dx$$

$$\leqq M\int_X^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \qquad (\because \quad (46.7)\text{式}).$$

ここで，前項の結果(46.6)によって，右辺の積分は，$\alpha>1$ のとき，X を十分大きくとるかぎり，いくらでも小さくできる．したがって，無限積分(46.8)は存在する．

後半の証明も同様である．　　(証明終)

† 厳密な証明ではないが，証明から定理の意味をよく理解されたい．

例 2. 無限積分:

$$\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx=\lim_{X\to\infty}\int_0^X xe^{-ax}\,dx \qquad (a>0) \tag{46.10}$$

の値を求めよう.

部分積分法(143 ページ)によって,

$$\int_0^\infty xe^{-ax}\,dx=\lim_{X\to\infty}\int_0^X xe^{-ax}\,dx$$

$$=\lim_{X\to\infty}\left\{\left[-\frac{1}{a}xe^{-ax}\right]_0^X+\frac{1}{a}\int_0^X e^{-ax}\,dx\right\}=*.$$

ここで, (15.4)式(52 ページ)によって,

$$\lim_{x\to\infty}xe^{-ax}=0 \qquad (a>0)$$

であることに注意すれば,

$$*=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{a}\int_0^X e^{-ax}\,dx=\lim_{X\to\infty}\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^X=\frac{1}{a^2}.$$

$$\therefore \quad \int_0^\infty xe^{-ax}\,dx=\frac{1}{a^2} \qquad (a>0).$$ (例 2 終)

例 3. 無限積分:

$$\int_1^\infty e^{-x}x^\beta\,dx \qquad (\beta\text{: 実数}) \tag{46.11}$$

は存在することを証明しよう.

定理 46.1 によって,

$$0<e^{-x}x^\beta<\frac{1}{x^\alpha} \qquad (N\leqq x<\infty;\ \alpha>1) \tag{46.12}$$

となるように, N と α がえらべれば, 無限積分(46.11)は存在する.

(15.4)式 (52 ページ)によって, 任意の α に対して,

$$e^{-x}x^{\beta+\alpha}\to 0 \qquad (x\to\infty).$$

したがって, 任意の $\alpha>1$ に対して, N を十分大きくえらべば, (46.12)式がみたされる. (例 3 終)

問 1. つぎの無限積分の値を求めよ:

(1) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x^{1.0001}}$. (2) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x(1+x)}$.

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty\frac{dx}{1+x^2}$. (4) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{dx}{1-x+x^2}$.

(5) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{x}{1+x^2}\,dx$. (6) $\displaystyle\int_1^\infty\frac{dx}{x(1+x^2)}$.

（7）$\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$.　　（8）$\displaystyle\int_0^\infty \sin x\,dx$.

（9）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\,dx$.　　（10）$\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx$　$(a>0)$.

＊問 2.　例 2 にならって，つぎの無限積分の値を求めよ：

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx \qquad (n \text{ は自然数；} a>0).$$

12

重 積 分

§47. 重 積 分

1. 重 積 分　　xy-平面上の長方形閉領域:

$$R=\{a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}^{\dagger} \qquad (図 47.1)$$

上に有界な関数 $f(x, y)$ が定義されているとする.

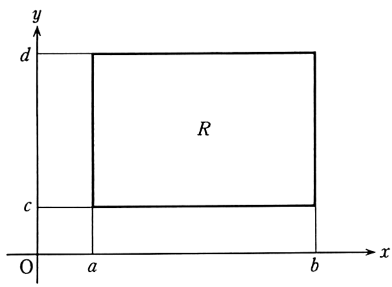


図 47.1

区間: $a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d$ を, それぞれ, 任意の幅の有限個の小区間に分割し, それらを

$$a=a_0<a_1<\cdots<a_m=b;$$
$$c=b_0<b_1<\cdots<b_n=d$$

とする. この区間の分割をもとにして, 長方形 R の mn 個の小長方形への**分割**: $\Delta=\Delta[R]$ が定義される(図 47.2(つぎのページ)):

---

† 厳密には, $R=\{(x, y) \mid a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ と書くべきであるが, この本では, 簡略したこの表現を用いる.

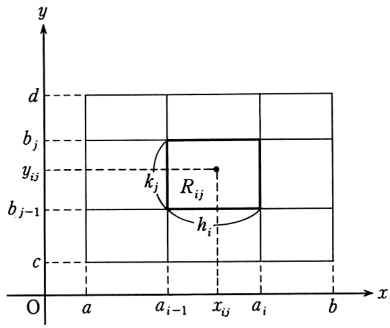


図 47.2

$$\Delta:\ R_{ij}=\{a_{i-1}\leqq x\leqq a_i,\ b_{j-1}\leqq y\leqq b_j\} \qquad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n).$$

各小長方形 R_{ij} の横, 縦の幅を, それぞれ,

$$h_i=a_i-a_{i-1}, \qquad k_j=b_j-b_{j-1} \qquad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

とし, 各 R_{ij} 上に任意にえらんだ点を $(x_{ij},\ y_{ij})$ とする:

$$a_{i-1}\leqq x_{ij}\leqq a_i, \qquad b_{j-1}\leqq y_{ij}\leqq b_j \qquad (i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n).$$

分割 Δ と任意にえらばれた組: $X=\{x_{ij}\}$, $Y=\{y_{ij}\}$ に対して, **近似和**:

$$S[\Delta;\ X,\ Y]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_{ij},\ y_{ij})A_{ij} \qquad (A_{ij}=h_ik_j \text{ は } R_{ij} \text{ の面積})$$

をつくる. ここで, $f(x_{ij},\ y_{ij})A_{ij}$ は, R_{ij} を底面, $f(x_{ij},\ y_{ij})$ を高さ, とする直方体の体積を表す(図 47.3).

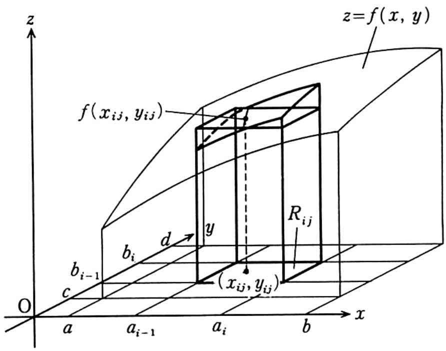


図 47.3

さて，小区間の幅 h_i, k_j のうち，最大のものを $\delta[\varDelta]$ とする；すなわち，

$$\delta[\varDelta]=\max_{1\leqq i\leqq m,\,1\leqq j\leqq n}(h_i,\ k_j).$$

いま，

$$\delta[\varDelta]\to 0$$

となるように，分割 $\varDelta$ をかぎりなく細かくしていったときに，

分割 $\varDelta$ を細かくする仕方，

$X=\{x_{ij}\}$, $Y=\{y_{ij}\}$ のえらび方

に無関係に，$S[\varDelta;\ X,\ Y]$ が，一定の値 I にかぎりなく近づくならば；すなわち，

$$S[\varDelta;\ X,\ Y]\to I \qquad (\delta[\varDelta]\to 0)$$

ならば，この I を $f(x,y)$ の(閉)領域 R 上の **2 重積分**といい，

$$I=\iint_R f(x,y)\,dxdy \tag{47.1}$$

で表す；すなわち，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\lim_{\delta[\varDelta]\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}f(x_{ij},\ y_{ij})A_{ij}. \tag{47.2}$$

そして，$f(x,y)$ は R 上で**積分可能**であるという．

xyz-空間の直方体領域 R で定義された関数 $f(x,y,z)$ の **3 重積分**:

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz$$

も，2 重積分と同様な方法で定義できる．

2 重積分，3 重積分，… を総称して，**重積分**という．

2．一般の有界領域での 2 重積分　一般の有界閉領域 D 上の 2 重積分:

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

は，つぎのように定義される:

D をふくむ長方形:

$$R=\{a\leqq x\leqq b,\ c\leqq y\leqq d\}$$

(図 47.4)

をえらび，

$$f(x,y)=0 \qquad ((x,y)\in R-D)$$

とおくことにより，$f(x,y)$ の定義域を R にまで拡張し，

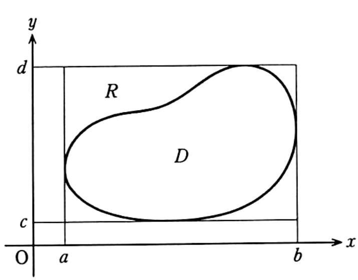


図 47.4

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \iint_R f(x, y)\,dxdy \tag{47.3}$$

によって，閉領域 D 上の**2重積分**を定義する；ここで，右辺の積分は1項で定義した積分である．また，D は領域でもよく，領域に境界を加えても，2重積分(47.3)の値はかわらない．

つぎの定理がなりたつことが示される：

定理 47.1 $f(x, y)$ が D 上で連続ならば，そこで積分可能である．

3. 幾何学的意味

定理 47.2 $f(x, y)$ は閉領域 D で連続で，$f(x, y) \geqq 0$ とし，閉領域 D と，D の境界 ∂D 上の z-軸に平行な直線を母線とする柱面，および曲面：$z=f(x, y)$ によってかこまれた立体を B (図 47.5) とする：

$$B=\{0 \leqq z \leqq f(x, y),\ (x, y) \in D\}.$$

そのとき，B の体積を $V=V[B]$ とすれば，

$$V = \iint_D f(x, y)\,dxdy. \tag{47.4}$$

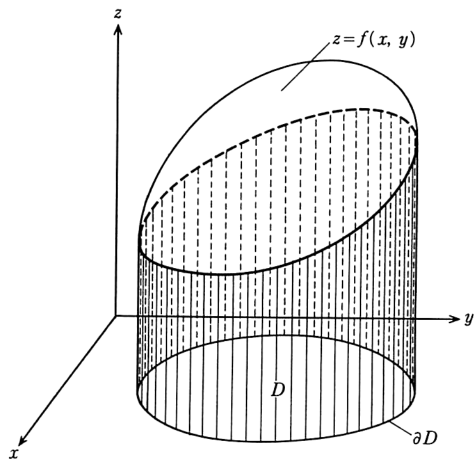


図 47.5

(2重積分の幾何学的意味)

証明 2項での定義にしたがって，$f(x, y)$ は，D をふくむ長方形領域 R で定義され，(47.3)式によって，

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint_R f(x, y)\,dx\,dy$$

と仮定してよい. 1 項で定義した R の分割 $\varDelta = \varDelta[R]$ に対して, 1 項と同じ記号を用いて,

(47. 5)
$$M_{ij} = \max_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y),$$
$$m_{ij} = \min_{(x,y)\in R_{ij}} f(x, y)$$
$$(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$$

とし(図 47.6),

(47. 6)
$$S[\varDelta] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} M_{ij} A_{ij},$$
$$s[\varDelta] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} A_{ij}$$

とすれば, $S[\varDelta]$, $s[\varDelta]$ は, ともに, 近似和であって,

$$s[\varDelta] \leqq V \leqq S[\varDelta].$$

一方, $f(x, y)$ は D で連続, R-D 上で 0 で, D の境界 C と共通な部分をもつ $\varDelta$ の小長方形 R_{ij} の全体(図 47.7)の近似和への寄与は, $\delta[\varDelta]\to 0$ のとき, 0 に近づくから, 定理 47.1 によって, $f(x, y)$ は R 上で積分可能である.

$$\therefore \quad \iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\delta[\varDelta]\to 0} s[\varDelta] = \lim_{\delta[\varDelta]\to 0} S[\varDelta] = V.$$

(証明終)

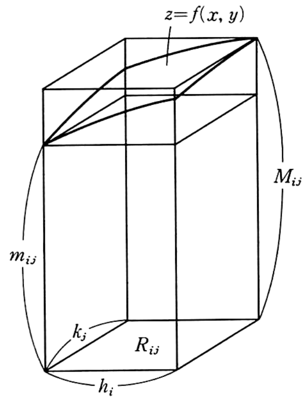


図 47.6

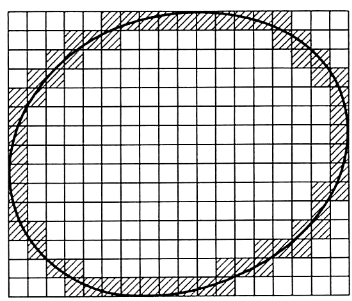


図 47.7

§ 48. 2 重積分と累次積分

1. 2 重積分と累次積分の関係 $[a, b]$ で定義された連続関数: $f_1(x)$, $f_2(x)$ $(f_1(x) \leqq f_2(x))$ に対して, 閉領域 D が,

(48. 1)
$$D = \{f_1(x) \leqq y \leqq f_2(x),\ a \leqq x \leqq b\}$$

によって定義されていると仮定する(図 48.1(つぎのページ)).

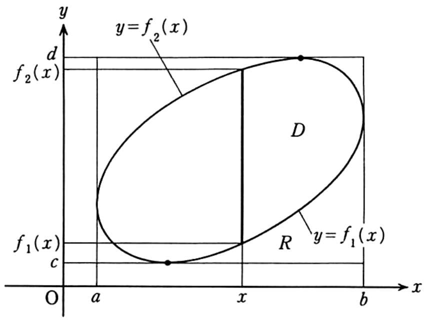


図 48.1

$f(x, y)$ は D で連続で, $f(x, y) \geqq 0$ とする. 定理 47.2 (176 ページ)で定義したように, 立体:

$$B = \{0 \leqq z \leqq f(x, y),\ (x, y) \in D\}$$

の体積を $V = V[B]$ とし, 平面: $x =$ 一定 $(x \in [a, b])$ での立体 B の断面積を $A(x)$ とすれば(図 48.2), まず, 定理 38.4 (136 ページ)によって,

$$A(x) = \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy. \tag{48.2}$$

つぎに, 定理 47.2 (176 ページ)と定理 43.1 (152 ページ)によって,

$$V = \iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_a^b A(x)\, dx = \int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx. \tag{48.3}$$

(48.3)式の右辺を **累次積分** とよび, つぎのように表す:

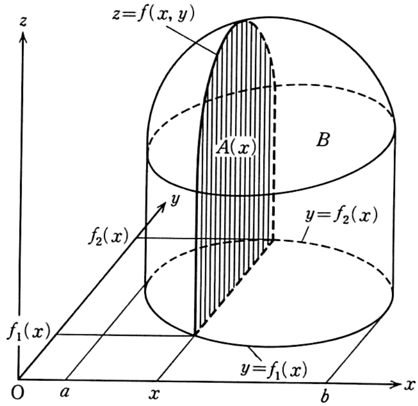


図 48.2

(48. 4) $$\int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \equiv \int_a^b \left\{ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy \right\} dx.$$

つぎに，$[c, d]$ で定義された連続関数：$g_1(y)$，$g_2(y)$ $(g_1(y) \leqq g_2(y))$ に対して，閉領域 D が，

(48. 5) $$D = \{ g_1(y) \leqq x \leqq g_2(y),\ c \leqq y \leqq d \}$$

によって定義されているとき(図48.3)，まったく，同様にして，つぎの公式がえられる：

(48. 6) $$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

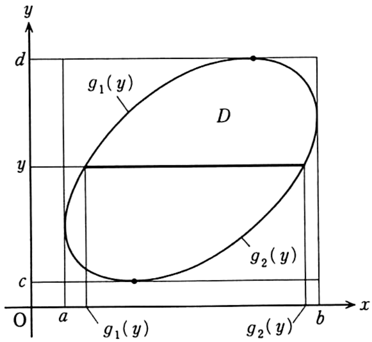


図 48.3

さて，$f(x, y) \geqq 0$ としたが，この仮定がみたされないときは，$f(x, y)$ のかわりに，$f(x, y) - m$ $\left(m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y) \right)$ を考えれば，関数：$f(x, y) - m$ と定数関数 m に対しては，(48.4)式，(48.6)式がなりたつから，一般の $f(x, y)$ に対しても，(48.4)式，(48.6)式がなりたつことがわかる．

以上の結果をまとめて，つぎの定理がえられる：

定理 48.1 閉領域 D が，(48.1)式または (48.5)式によって定義されており，$f(x, y)$ が D で連続であるとき，それぞれ，つぎの等式がなりたつ：

(48. 7) $$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_a^b dx \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

(48. 8) $$\iint_D f(x, y)\, dx dy = \int_c^d dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y)\, dx.$$

(2重積分と累次積分の関係)

2. 応用例

例 1. $I=\iint_D x\,dxdy,\qquad D=\{x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0\ (a>0)\}.$

§43 の例 1(153 ページ) と同じものであるが，ここでは，この積分 I を，累次積分(48.7)式または(48.8)式に変換して，2 通りの方法で求めてみよう．

まず，2 重積分と累次積分の関係(48.7)によって，

$$I=\int_0^a dx\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} x\,dy \qquad (\text{図 } 48.4)$$

$$=\int_0^a x\Big[\,y\,\Big]_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx$$

$$=\int_0^a 2x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=*.$$

ここで，積分変数の変換：$u=a^2-x^2$ を行えば，

$$du=-2x\,dx,\qquad \begin{cases} x:\ 0\sim a,\\ u:\ a^2\sim 0.\end{cases}$$

したがって，置換積分法(142 ページ)によって，

$$*=-\int_{a^2}^0 u^{\frac{1}{2}}\,du=\int_0^{a^2} u^{\frac{1}{2}}\,du$$

$$=\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^{a^2}=\frac{2}{3}a^3.$$

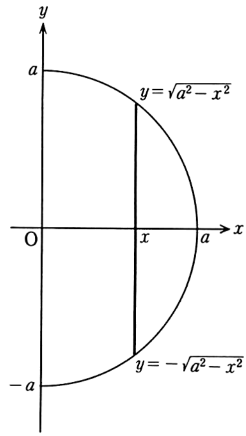


図 48.4

つぎに，2 重積分と累次積分の関係(48.8)によって，

$$I=\int_{-a}^a dy\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} x\,dx \qquad (\text{図 } 48.5)$$

$$=\int_{-a}^a \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{a^2-y^2}} dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^a (a^2-y^2)\,dy=\frac{1}{2}\left[a^2y-\frac{1}{3}y^3\right]_{-a}^a$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)-\left(-a^3+\frac{1}{3}a^3\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}a^3.$$

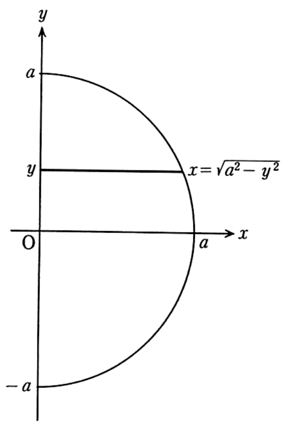


図 48.5

積分 I は，集合：

$$B=\{0\leqq z\leqq x,\ (x,y)\in D\}$$

の体積に等しい(図 48.6(つぎのページ))．

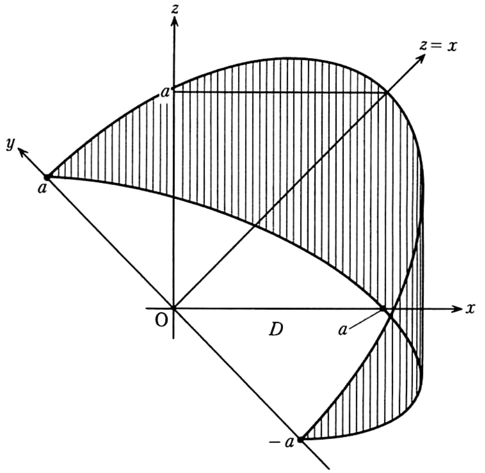


図 48.6

（例 1 終）

例 2. つぎの累次積分の変換公式はよく利用される:

$f(x, y)$が,

$$D=\{a \leqq y \leqq x \leqq b\} \qquad (\text{図 } 48.7)$$

で連続ならば,

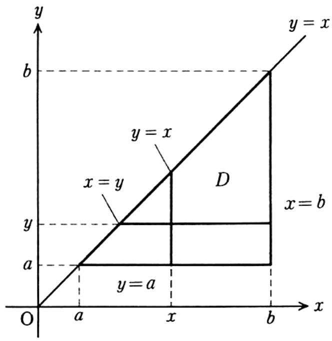


図 48.7

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy = \int_a^b dx \int_a^x f(x, y)\,dy$$

$$= \int_a^b dy \int_y^b f(x, y)\,dx. \quad \text{（ディリクレの公式）}$$

（例 2 終）

問 1. つぎの 2 重積分の値を求めよ:

(1) $\iint_D (1+x+y)\,dxdy, \qquad D=\{a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}.$

(2) $\iint_D xy\,dxdy, \qquad D=\{0 \leqq y \leqq x,\ 0 \leqq x \leqq 1\}.$

(3) $\iint_D x^2 y\,dxdy, \qquad D=\{x \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq 1\}.$

(4) $\iint_D x\,dxdy, \qquad D=\{x+y \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\}.$

(5) $\iint_D dxdy, \qquad D=\{y \leqq 2x,\ x \leqq 2y,\ x+y \leqq 3\}.$

(6) $\iint_D y\,dxdy, \qquad D=\{y^2 \leqq x,\ x-2 \leqq y\}.$

(7) $\iint_D y\,dxdy, \qquad D=\{0 \leqq x \leqq y \leqq \sqrt{x} \leqq 1\}.$

(8) $\iint_D dxdy, \qquad D=\{y \geqq x^2,\ y^2 \leqq 8x\}.$

(9) $\iint_D x\,dxdy, \qquad D=\left\{x^2 \leqq y \leqq \frac{x}{2},\ 0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\right\}.$

(10) $\iint_D xy\,dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2 \leqq a^2,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\} \quad (a>0).$

(11) $\iint_D dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\}.$

(12) $\iint_D y\,dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2 \leqq 1,\ 0 \leqq x \leqq y\}.$

(13) $\iint_D \sin(x+y)\,dxdy, \qquad D=\left\{x+y \leqq \frac{\pi}{2},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0\right\}.$

(14) $\iint_D e^{2x+3y}\,dxdy, \qquad D=\{0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b\} \quad (a>0,\ b>0).$

(15) $\iint_D r\,drd\theta, \qquad D=\{0 \leqq r \leqq a,\ \alpha \leqq \theta \leqq \beta\} \quad (a>0,\ 0 \leqq \alpha < \beta \leqq 2\pi).$

(16) $\iint_D r\,drd\theta, \qquad D=\{0 \leqq r \leqq a\sin\theta,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi\} \quad (a>0).$

(17) $\iint_D r\,drd\theta, \qquad D=\{0 \leqq r \leqq 2a(1+\cos\theta),\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi\} \quad (a>0).$

問 2. つぎの累次積分の順序を変更せよ:

(1) $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y)\,dy.$

(2) $\int_2^3 dy \int_{2y}^{3y} f(x, y)\,dx.$

(3) $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x, y)\,dy.$

(4) $\int_0^1 dx\int_{x^2}^{2-x} f(x, y)\,dy.$

(5) $\int_{-1}^1 dx\int_0^{e^x} f(x, y)\,dy.$

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{2a\cos\theta} f(r, \theta)\,dr \qquad (a>0).$

問 3. つぎの等式を証明せよ:

$$\int_0^a dx\int_0^x f(y)\,dy=\int_0^a f(y)(a-y)\,dy \qquad (a>0).$$

§49. 積分変数の変換

1. 近似和の一般化 有界な閉領域 D 上に, 関数 $f(x, y)$ が定義されているとする. D の n 個の小領域: D_1, D_2, …, D_n への分割 $\varDelta$ を定義し(図 49.1), 各小領域 D_i 上に任意の点 (x_i, y_i) をえらんで, **近似和**:

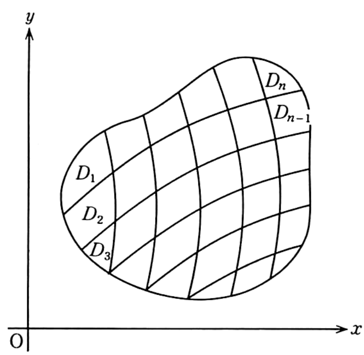


図 49.1

(49.1) $$S[\varDelta;\ X,\ Y]=f(x_1, y_1)A_1+f(x_2, y_2)A_2+\cdots+f(x_n, y_n)A_n$$

$(A_i\ (i=1, \cdots, n)$ は D_i の面積, $X=\{x_i\}_{i=1}^n$, $Y=\{y_i\}_{i=1}^n)$

をつくる. 小領域 D_i の**直径** (D_i 上の 2 点間の距離の最大値)を $d(D_i)$ とし,

(49.2) $$\delta[\varDelta]=\max_{1\leqq i\leqq n} d(D_i)$$

とおく.

定理 49.1 $f(x, y)$ は，有界な閉領域 D で連続であると仮定する．そのとき，$\delta[\varDelta]\to 0$ となるように，閉領域 D の小領域への分割 $\varDelta$ をかぎりなく細かくしていったとき，分割 $\varDelta$ を細かくする仕方，$X=\{x_i\}_{i=1}^n$，$Y=\{y_i\}_{i=1}^n$ のえらび方に無関係に，近似和 $S[\varDelta;\ X,\ Y]$ は 2 重積分: $\iint_D f(x, y)\,dxdy$ に収束する:

$$\iint_D f(x, y)\,dxdy=\lim_{\delta[\varDelta]\to 0} S[\varDelta;\ X,\ Y]. \tag{49.3}$$

(一般の近似和の 2 重積分への収束)

証明 必要ならば，$f(x, y)$ のかわりに，$f(x, y)-m\ \left(m=\min_{(x,y)\in D} f(x, y)\right)$ を考えればよいから，$f(x, y)\geqq 0$ と仮定してよい．

$$M_i=\max_{(x,y)\in D_i} f(x, y), \qquad m_i=\min_{(x,y)\in D_i} f(x, y) \qquad (i=1, \cdots, n)$$

とし，

$$S[\varDelta]=\sum_{i=1}^n M_iA_i, \qquad s[\varDelta]=\sum_{i=1}^n m_iA_i$$

とすれば，$S[\varDelta]$，$s[\varDelta]$ は，ともに，近似和であって，

$$s[\varDelta]\leqq S[\varDelta;\ X,\ Y]\leqq S[\varDelta], \tag{49.4}$$

$$s[\varDelta]\leqq V[B]\leqq S[\varDelta]; \tag{49.5}$$

ここで，$V[B]$ は，立体: $B=\{0\leqq z\leqq f(x, y),\ (x, y)\in D\}$ の体積である．$f(x, y)$ は閉領域 D で連続であるから，$\varepsilon[\varDelta]\equiv\max_{1\leqq i\leqq n}(M_i-m_i)$ とおけば，$\delta[\varDelta]\to 0$ のとき，$\varepsilon[\varDelta]\to 0$ であることが示される．したがって，D の面積を $A[D]$ とするとき，

(49.6)

$$0\leqq S[\varDelta]-s[\varDelta]=\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)A_i\leqq \varepsilon[\varDelta]A[D]\to 0 \qquad (\delta[\varDelta]\to 0).$$

(49.4)，(49.5)，(49.6) の 3 式と定理 47.2 (176 ページ) によって，(49.3)式がえられる． (証明終)

2. 積分変数の変換

定理 49.2

$$\begin{cases} u=\varphi(x, y), \\ v=\psi(x, y) \end{cases} \tag{49.7}$$

は，xy-平面の閉領域 D から，uv-平面の閉領域 G への 1 対 1 の写像とし (図 49.2)，$\varphi(x, y)$，$\psi(x, y)$ は連続な 1 階偏導関数をもつとする．

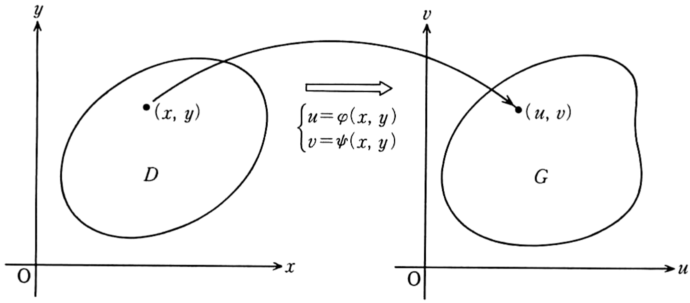


図 49.2

そのとき，$f(u, v)$ が G で連続ならば，

$$(49.8) \qquad \iint_G f(u, v)\,dudv = \iint_D f(\varphi(x, y),\ \psi(x, y))\left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right| dxdy$$

(2重積分の積分変数の変換公式)；

ここで，

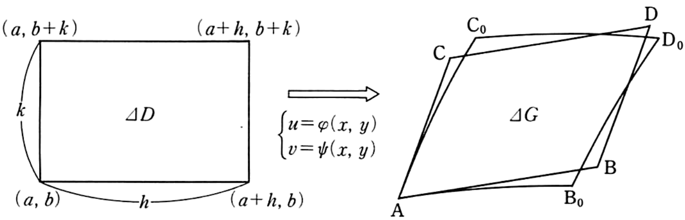
$$(49.9) \qquad \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} \equiv \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

は，**ヤコビアン**とよばれる．

証明　D 内の小長方形：

$$(49.10) \qquad \Delta D = \{a \leqq x \leqq a+h,\ b \leqq y \leqq b+k\}$$

の写像(49.7)による像閉領域を ΔG とする(図 49.3)．



A(φ, ψ),　$B_0(\varphi(a+h, b),\ \psi(a+h, b))$,　$C_0(\varphi(a, b+k),\ \psi(a, b+k))$,
$D_0(\varphi(a+h, b+k),\ \psi(a+h, b+k))$;　B$(\varphi+h\varphi_x, \psi+h\psi_x)$,　C$(\varphi+k\varphi_y, \psi+k\psi_y)$,
D$(\varphi+h\varphi_x+k\varphi_y, \psi+h\psi_x+k\psi_y)$.

図 49.3

定理の仮定によって, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$ は全微分可能であるから,

$$\varphi(a+h,\ b+k)=\varphi+(h\varphi_x+k\varphi_y)+\sigma_1,$$
$$\psi(a+h,\ b+k)=\psi+(h\psi_x+k\psi_y)+\sigma_2;$$

ここで,

(49.11) $$\frac{\sigma_1}{|h|+|k|}\to 0,\quad \frac{\sigma_2}{|h|+|k|}\to 0 \qquad (h, k\to 0);$$

$$\varphi=\varphi(a, b),\quad \varphi_x=\varphi_x(a, b),\quad \varphi_y=\varphi_y(a, b);$$
$$\psi=\psi(a, b),\quad \psi_x=\psi_x(a, b),\quad \psi_y=\psi_y(a, b).$$

ゆえに, $|h|$, $|k|$ が十分小さいときには, 近似的に,

$$\varphi(a+h, b)\fallingdotseq\varphi+h\varphi_x,\quad \varphi(a, b+k)\fallingdotseq\varphi+k\varphi_y,$$
$$\varphi(a+h, b+k)\fallingdotseq\varphi+h\varphi_x+k\varphi_y;$$
$$\psi(a+h, b)\fallingdotseq\psi+h\psi_x,\quad \psi(a, b+k)\fallingdotseq\psi+k\psi_y,$$
$$\psi(a+h, b+k)\fallingdotseq\psi+h\psi_x+k\psi_y.$$

したがって, 像領域 ΔG の面積 $A[\Delta G]$ は, 近似的に, 4 点:

$\mathrm{A}(\varphi, \psi)$,
$\mathrm{B}(\varphi+h\varphi_x,\ \psi+h\psi_x)$,
$\mathrm{C}(\varphi+k\varphi_y,\ \psi+k\psi_y)$,
$\mathrm{D}(\varphi+h\varphi_x+k\varphi_y,\ \psi+h\psi_x+k\psi_y)$

を頂点とする平行 4 辺形の面積に等しい(図 49.3). この平行 4 辺形(図 49.4):

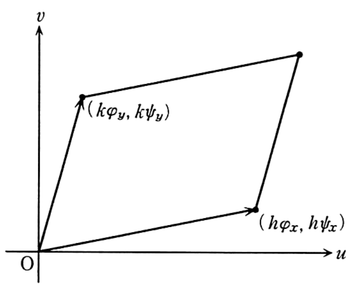


図 49.4

の面積を計算することによって,

$$A[\Delta G]\fallingdotseq|h\varphi_x\cdot k\psi_y-k\varphi_y\cdot h\psi_x|=|\varphi_x\psi_y-\varphi_y\psi_x|\cdot hk.$$

ここで, hk は小長方形 ΔD の面積 $A[\Delta D]$ に等しいから,

(49.12) $$A[\Delta G]\fallingdotseq\left[\left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right|\right]_{x=a, y=b}\cdot A[\Delta D].$$

いま，§47の2項(175ページ)で定義した D をふくむ長方形 R をえらび，R の小長方形への分割を $\Delta=\Delta[R]$ とする．ΔD は，D にふくまれる分割 Δ の任意の小長方形で，(49.10)式によって表されているものとし，ΔG は，写像(49.7)による ΔD の像閉領域とする(図49.5)．

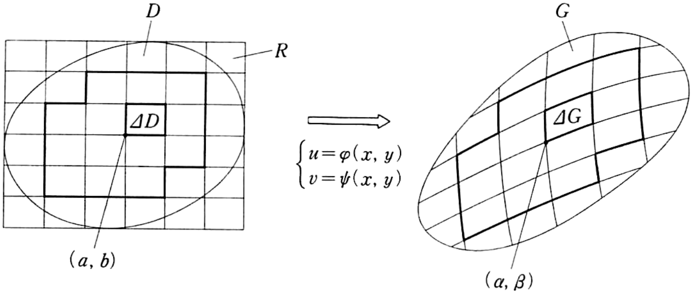


図 49.5

$\alpha=\varphi(a, b)$，$\beta=\psi(a, b)$ とおいて，近似和：

(49. 13)
$$S[\Delta]\equiv\sum_{\Delta G\subset G} f(\alpha, \beta)A[\Delta G]$$

をつくり，$\delta[\Delta]\to 0$ となるような分割 Δ をかぎりなく細かくするとき，定理49.1によって，

(49. 14)
$$S[\Delta]\to\iint_G f(u, v)\,dudv \qquad (\delta[\Delta]\to 0).$$

他方において，(49.12)式によって，近似的に，

$$S[\Delta]\fallingdotseq\sum_{\Delta D\subset D} f(\varphi(a, b),\ \psi(a, b))\left[\left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right|\right]_{x=a,\, y=b}\cdot A[\Delta D]$$

と書ける．ここで，右辺の近似式を使ったことによる誤差は，$\delta[\Delta]\to 0$ のとき，0 にかぎりなく近づくことが示されるから，$\delta[\Delta]\to 0$ のときの，$S[\Delta]$ の極限値は，右辺の極限値と一致する．したがって，2重積分の定義(§47の1項，2項(173～176ページ))と定理47.1(176ページ)によって，

(49. 15)
$$S[\Delta]\to\iint_D f(\varphi(x, y),\ \psi(x, y))\left|\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)}\right|dxdy \qquad (\delta[\Delta]\to 0).$$

極限関係(49.14)と(49.15)から，変換公式(49.8)がえられる．　　(証明終)

3. 直交座標から極座標への変換

(49. 16)
$$x=r\cos\theta, \qquad y=r\sin\theta \qquad (r>0)$$

のとき，変換公式(49.8)によって，

$$\iint_G f(x, y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}\right| drd\theta.$$

$$x_r = \cos\theta, \qquad x_\theta = -r\sin\theta;$$

$$y_r = \sin\theta, \qquad y_\theta = r\cos\theta.$$

$$\therefore \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = x_r y_\theta - x_\theta y_r$$

$$= \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\sin\theta$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r.$$

(49.17) $\therefore \quad \iint_G f(x, y)\,dxdy = \iint_D f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\,r\,drd\theta.$

(2 重積分の極座標表示)

$r\theta$-平面の Δr, $\Delta\theta$ を 2 辺とする小長方形 ΔD の, 変換 (49.16) による像閉領域を ΔG とし, ΔD, ΔG の面積を, それぞれ, $A[\Delta D]$, $A[\Delta G]$ とする. (図 49.6).

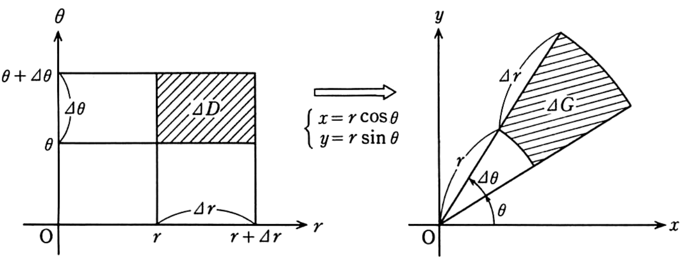


図 49.6

そのとき,

$$A[\Delta G] = \pi(r+\Delta r)^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi} - \pi r^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{2\pi}$$

$$= \left(r + \frac{1}{2}\Delta r\right)\Delta r\,\Delta\theta$$

$$\fallingdotseq r\,\Delta r\,\Delta\theta = r\,A[\Delta D].$$

これを利用すれば, 定理 49.1 によって, 直接, 公式(49.17)がえられる.

例 1. (§48 の例 1(180 ページ)参照.)

$$\iint_{x^2+y^2\leqq a^2,\, x\geqq 0} x\, dxdy$$

$$=\iint_{r\leqq a,\, -\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}} r\cos\theta\cdot r\, drd\theta$$

(図 49.7)

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\, d\theta\int_0^a r^2\, dr$$

$$=\Big[\sin\theta\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a=\frac{2}{3}a^3.$$

(例 1 終)

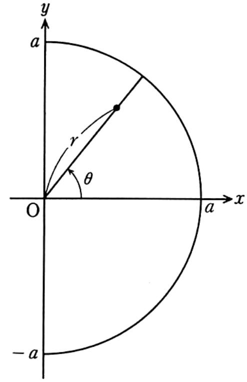


図 49.7

4. 無限積分　2 重積分の広義の積分は，1 変数の関数の広義の積分(第 11 章(164 ページ))と同様にして，定義できる．そこで，一般的な話は省略して，無限積分の場合について，例によって，それを説明しよう．

例 2. $I=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$　　(図 49.8).

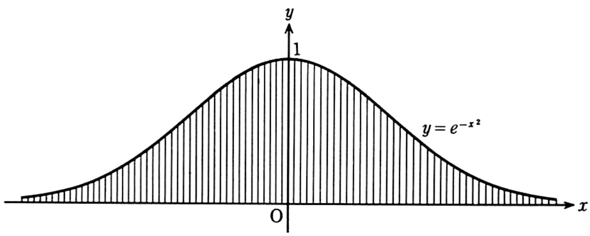


図 49.8

これは，1 変数の関数の無限積分であるが，これから述べるように，2 重積分の無限積分に変換すると，簡単に求めることができる．

$$I^2=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy$$

$$=\iint_{|x|<\infty,\, |y|<\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$=\lim_{X\to\infty}\iint_{|x|\leqq X,\, |y|\leqq X} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$=\lim_{R\to\infty}\iint_{x^2+y^2\leqq R^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

$$=\lim_{R\to\infty}\iint_{r\leqq R} e^{-r^2} r\,drd\theta \qquad (x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta)$$

$$=\lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^R re^{-r^2}\,dr$$

$$=\lim_{R\to\infty}\Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi}\cdot\Big[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big]_0^R$$

$$=\lim_{R\to\infty} 2\pi\Big(-\frac{1}{2}e^{-R^2}+\frac{1}{2}\Big)=\pi.$$

明らかに, $I>0$ であるから,

$$(49.18) \qquad \therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=2\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}.$$

この積分は, 確率・統計および熱伝導・拡散の理論によく現れる.

(例 2 終)

問 1. つぎの 2 重積分を極座標に変換して求めよ ($a>0$):

(1) $\iint_D dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}.$

(2) $\iint_D xy\,dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}.$

(3) $\iint_D x\,dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq y\}.$

(4) $\iint_D dxdy, \qquad D=\{0\leqq y\leqq x,\ 0\leqq x\leqq 1\}.$

(5) $\iint_D dxdy, \qquad D=\{x\leqq y\leqq 1,\ 0\leqq x\leqq 1\}.$

(6) $\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D=\{a\leqq\sqrt{x^2+y^2}\leqq b\} \quad (a<b).$

(7) $\iint_D \sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2\leqq a^2\}.$

(8) $\iint_D \tan^{-1}\frac{y}{x}\,dxdy, \qquad D=\{x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}.$

問 2. つぎの累次積分を極座標で表せ ($a>0$):

(1) $\int_0^a dx\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y)\,dy.$

(2) $\int_0^a dx\int_0^a f(x,y)\,dy.$

問 3. 2 重積分の極座標表示を利用して, つぎの立体の体積を求めよ ($a>0$):

(1) 曲面: $z=xy$ ($x\geqq 0,\ y\geqq 0$), 円柱面: $x^2+y^2=a^2$ および xy-平面によってかこまれた部分.

（2） 放物面: $z=x^2+y^2$, 円柱面: $x^2+y^2=a^2$ および xy-平面によってかこまれた部分.

（3） 円柱面: $x^2+y^2=a^2$, 平面: $x+z=a$ および xy-平面によってかこまれた部分.

（4） 球: $x^2+y^2+z^2\leqq a^2$ と 円柱: $x^2+y^2\leqq ax$ の共通部分.

（5） 曲面: $z=e^{-x^2-y^2}$ と xy-平面との間の無限にひろがった部分.

問 4. 1次変換:

$$\begin{cases} u=ax+by \\ v=cx+dy \end{cases} \qquad (a,\ b,\ c,\ d \text{ は定数で } ad-bc\neq 0)$$

によって, 閉領域 D が閉領域 G に写像されているとき, つぎの公式がなりたつことを証明せよ:

$$\iint_G f(u,\ v)\,dudv=|ad-bc|\iint_D f(ax+by,\ cx+dy)\,dxdy.$$

問 5. $\displaystyle\iint_{\substack{0\leqq x+y\leqq\pi,\\ 0\leqq x-y\leqq\pi}}(x+y)\sin(x-y)\,dxdy=\frac{1}{2}\iint_{\substack{0\leqq u\leqq\pi,\\ 0\leqq v\leqq\pi}}u\sin v\,dudv$

がなりたつことを示し, この値を求めよ.

§50. 3重積分

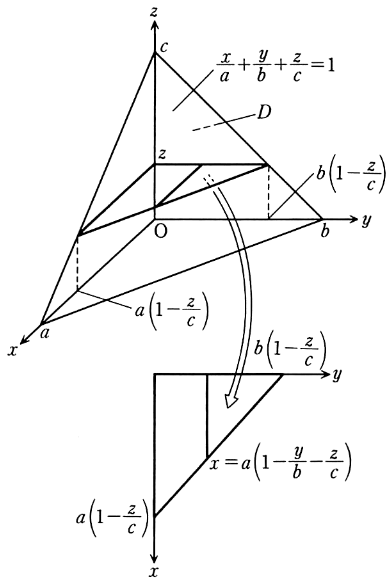
1. 直交座標

例 1. 平面:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \qquad (a, b, c>0)$$

と3つの座標平面とでかこまれた空間領域 D (図50.1) の体積 V を, 3重積分を用いて求めてみよう.

3重積分を累次積分に変換して求める.



z=一定 での断面図

図 50.1

$$V=\iiint_D dxdydz$$

$$=\int_0^c dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)} dy\int_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)} dx$$

(図50.1)

$$=\int_0^c dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)}\Big[\,x\,\Big]_0^{a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)} dy$$

$$=\int_0^c dz\int_0^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)} a\left(1-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)dy$$

$$=a\int_0^c\left[y-\frac{y^2}{2b}-\frac{yz}{c}\right]_{y=0}^{b\left(1-\frac{z}{c}\right)} dz$$

$$=a\int_0^c\left\{b\left(1-\frac{z}{c}\right)-\frac{b^2}{2b}\left(1-\frac{z}{c}\right)^2-\frac{b}{c}z\left(1-\frac{z}{c}\right)\right\}dz$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^c\left(1-\frac{z}{c}\right)^2 dz=\frac{ab}{2}\left[-\frac{c}{3}\left(1-\frac{z}{c}\right)^3\right]_0^c$$

$$=\frac{abc}{6}.$$

(例1終)

2. 円柱座標(半極座標)

空間の**円柱座標(半極座標)** (r, θ, z) と直交座標 (x, y, z) との関係は,

(50.1) $$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=z \qquad (図50.2).$$

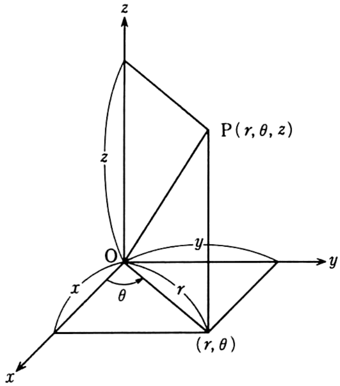


図 50.2

いま, $r\theta z$-空間の閉領域 D が, 変数変換(50.1)によって, xyz-空間の閉領域 G に写像されているとするとき, 2重積分の極座標表示 (49.17) (188ページ) によって, つぎの積分変数の変換公式がえられる:

(50. 2) $$\iiint_G f(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\,drd\theta dz.$$

(3重積分の円柱座標表示)

例 2. 球: $x^2+y^2+z^2=r^2+z^2 \leqq a^2$ $(a>0)$ の体積 V を3重積分の円柱座標表示を用いて求めよう.

$$V=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqq a^2} dxdydz=\iiint_{r^2+z^2\leqq a^2} r\,drd\theta dz$$
$$=\int_{-a}^{a} dz\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-z^2}} r\,dr$$
$$=\int_{-a}^{a}\Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi}\cdot\Big[\frac{1}{2}r^2\Big]_0^{\sqrt{a^2-z^2}} dz$$
$$=\frac{2\pi}{2}\int_{-a}^{a}(a^2-z^2)\,dz=\pi\Big[a^2z-\frac{1}{3}z^3\Big]_{-a}^{a}$$
$$=\pi\Big\{\Big(a^3-\frac{a^3}{3}\Big)-\Big(-a^3+\frac{a^3}{3}\Big)\Big\}=\frac{4}{3}\pi a^3.$$

(例2終)

3. 極 座 標　空間の**極座標** (r, θ, φ) と直交座標 (x, y, z) との関係は,

(50. 3) $$\begin{cases} x=r\sin\theta\cos\varphi, \\ y=r\sin\theta\sin\varphi, \\ z=r\cos\theta. \end{cases}$$

(図 50.3)

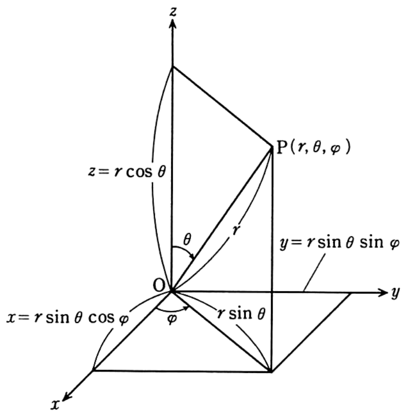


図 50.3

$r\theta\varphi$-空間の座標軸に平行な3辺 Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ をもつ小直方体 ΔD の, 変換 (50.3) による, xyz-空間での像を ΔG とし, ΔD, ΔG の体積を, それぞれ $V[\Delta D]$, $V[\Delta G]$ とする(図 50.4).

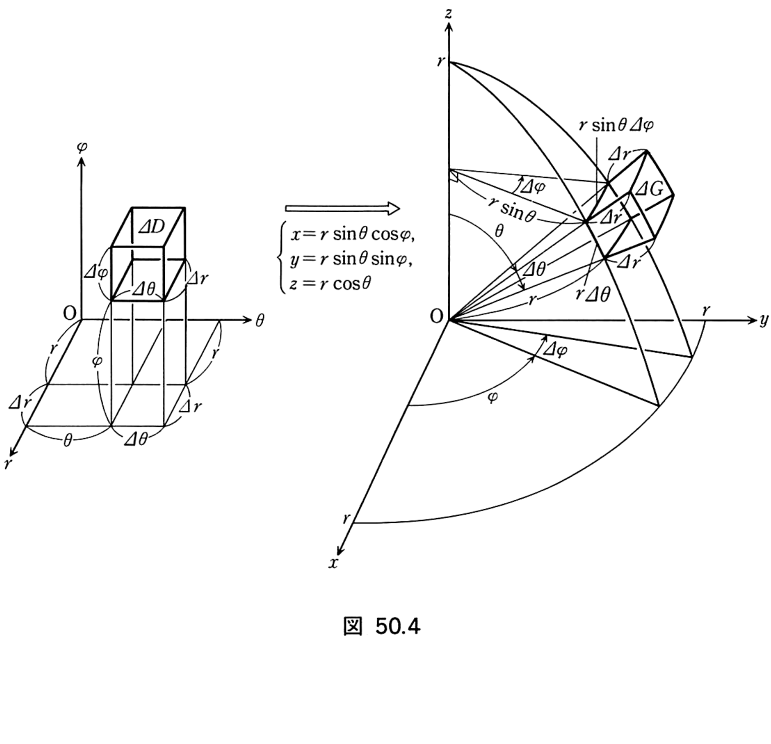


図 50.4

そのとき，$V[\Delta G]$ は，近似的に，

(50.4) $$V[\Delta G] \fallingdotseq \Delta r\cdot(r\Delta\theta)\cdot r\sin\theta\,\Delta\varphi$$
$$= r^2\sin\theta\,\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi = r^2\sin\theta\cdot V[\Delta D].$$

いま，$r\theta\varphi$-空間の閉領域 D が，写像(50.3)によって，xyz-空間の閉領域 G に写像されているとする．そのとき，2重積分の極座標表示をみちびいたのと同様にして（§49の3項（188〜189ページ）参照），(50.4)式によって，つぎの公式がえられる：

(50.5) $$\iiint_G f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \iiint_D f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi.$$

（3重積分の極座標表示）

例 3. 球：

$$x^2+y^2+z^2=r^2\leqq a^2 \qquad (a>0)$$

の体積 V を3重積分の極座標表示を用いて求めよう．

$$V=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqq a^2} dxdydz = \iiint_{r<a} r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a r^2\sin\theta\,dr$$
$$=\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^a \sin\theta\,d\theta$$
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta$$
$$=\frac{a^3}{3}\int_0^{2\pi} \Big[-\cos\theta\Big]_0^{\pi} d\varphi$$
$$=\frac{2a^3}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2a^3}{3}\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

（例3終）

問 1. つぎの3重積分の値を求めよ：

（1） $\iiint_D dxdydz$，　$D=\{x+y+z\leqq a,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\}$　$(a>0)$．

（2） $\iiint_D x\,dxdydz$，　$D=\{x+y+z\leqq a,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\}$　$(a>0)$．

（3） $\iiint_D dxdydz$，　$D=\{x^2+y^2+z^2\leqq a^2\}$　$(a>0)$．

（4） $\iiint_D dxdydz$，　$D=\left\{\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqq 1\right\}$　$(a>0,\ b>0,\ c>0)$．

問 2.　円柱座標を用いて，つぎの円柱座標で表された立体の体積を求めよ:

（1）　円柱: $r \leqq a,\ |z| \leqq b\ \ (a>0,\ b>0)$.

（2）　球: $r^2+z^2 \leqq a^2$ と 直円柱: $r \leqq a\cos\theta\,(a>0)$ の共通部分.

問 3.　空間の極座標を用いて，つぎの極座標で表された立体の体積を求めよ:

（1）　球: $r \leqq a\ (a>0)$ と 円すい: $0 \leqq \theta \leqq \alpha\ (0<\alpha<\pi)$ の共通部分.

（2）　球: $r \leqq 2a\cos\theta\ (a>0)$ と 円すい: $0 \leqq \theta \leqq \alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の共通部分.

§ 51. 曲 面 積

1. 曲 面 積　閉領域 D で定義された関数:

(51. 1)　$$z=f(x,y) \qquad ((x,y)\in D)$$

によって定義される曲面 S の表面積 A を求める公式をみちびこう.

$f(x,y)$ は D で全微分可能であると仮定するとき，D の内部にある小長方形:

(51. 2)　$$\Delta D:\quad x_0 \leqq x \leqq x_0+\Delta x,\qquad y_0 \leqq y \leqq y_0+\Delta y$$

上で，関数(51.1)によって定義される小曲面 ΔS (図 51.1)上の 1 点 $\mathrm{P}(\xi,\eta,\zeta)$ における接平面 Π の方程式は，(23.8)式(81 ページ)によって，

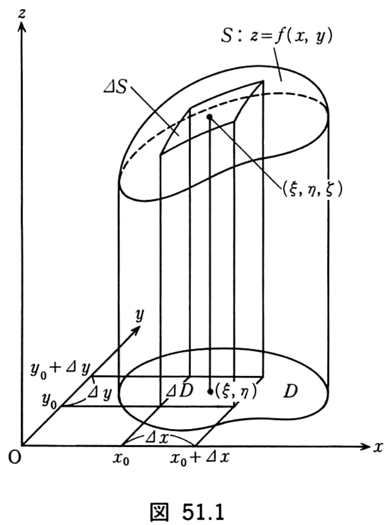


図 51.1

(51. 3)　　$z-\zeta=f_x(\xi,\eta)(x-\xi)+f_y(\xi,\eta)(y-\eta)\qquad(\zeta=f(\xi,\eta)).$

この接平面 $\varPi$ の, $\varDelta D$ 上にある部分(平行 4 辺形)を $\varDelta\varPi$ とし, $\varDelta D$, $\varDelta\varPi$ の面積を, それぞれ, $A[\varDelta D]$, $A[\varDelta\varPi]$, さらに, $\varPi$ が xy-平面となす角を θ とすれば(図 51.2),

(51. 4)　　$A[\varDelta\varPi]\cdot\cos\theta=A[\varDelta D]\qquad\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right).$

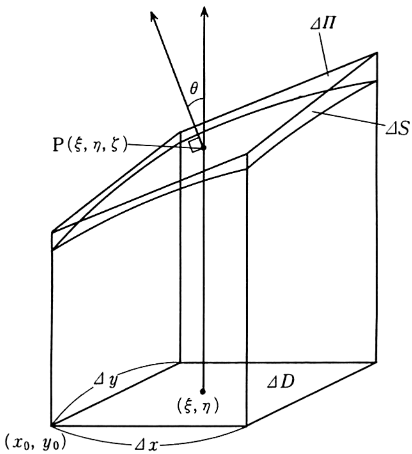


図 51.2

θ は, 点 $\mathrm{P}(\xi,\eta,\zeta)$ における S の法線と z-軸とのなす角に等しく, 接平面の方程式(51.3)によって, 法線の方向比が,

$$f_x(\xi,\eta):f_y(\xi,\eta):-1$$

によってあたえられることに注意すれば,

(51. 5)　　$\cos\theta=\dfrac{|-1|}{\sqrt{f_x(\xi,\eta)^2+f_y(\xi,\eta)^2+(-1)^2}}.$

(51.4)式と(51.5)式によって,

$$A[\varDelta\varPi]=\sqrt{1+f_x(\xi,\eta)^2+f_y(\xi,\eta)^2}\,A[\varDelta D].$$

これが, 小曲面 $\varDelta S$ の面積 $A[\varDelta S]$ の近似をあたえる:

(51. 6)　　$A[\varDelta S]\fallingdotseq\sqrt{1+f_x(\xi,\eta)^2+f_y(\xi,\eta)^2}\,A[\varDelta D].$

さて, 領域 D をふくむ長方形 R をえらんで, R の小長方形への分割を $\varDelta$ とする. D にふくまれる各小長方形 $\varDelta D$ ごとに, 小曲面 $\varDelta S$ の面積 $A[\varDelta S]$ の近似(51.6)をつくる. いま, f_x, f_y は D で連続であると仮定するとき, 定理 47.1(176 ページ)によって, それらの総和:

$$\sum_{\Delta D\subset D}\sqrt{1+f_x(\xi,\eta)^2+f_y(\xi,\eta)^2}\,A[\Delta D]$$

は，$\delta[\Delta]\to 0$ となるように分割 Δ をかぎりなく細かくすれば，つぎの(51.7)式の 2 重積分にかぎりなく近づく．したがって，つぎの定理がえられる:

定理 51.1 $f(x,y)$ が閉領域 D で連続な偏導関数をもつとき，曲面(51.1) の面積 A は，

(51.7) $$A=\iint_D\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}\,dxdy$$
$$=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$ **(曲面積の積分表示)**

2. 球の表面積

例. 球面:

(51.8) $$x^2+y^2+z^2=a^2 \qquad (a>0)$$

の表面積 A を求めよう．

第 1 象限: $x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $z\geqq 0$ にある部分の表面積 A_1 を 8 倍すればよい: $A=8A_1$. (51.8)式を z について解いて，正の分枝をとれば，

$$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}=(a^2-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2}(a^2-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}(-2y)=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

$$\therefore \qquad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

したがって，曲面積の積分表示(51.7)によって，

$$A_1=\iint_G\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=* \qquad (G:\ x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0).$$

ここで，極座標: $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を導入すれば，G の極座標表示は，

$$D:\ r\leqq a,\ 0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}.$$

$$\therefore \qquad *=\iint_D\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,drd\theta=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^a\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}\,dr$$
$$=a\Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\Big[-(a^2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^a=a\cdot\frac{\pi}{2}\cdot a=\frac{\pi a^2}{2}.$$

$$\therefore \qquad A=8A_1=8\cdot\frac{\pi a^2}{2}=4\pi a^2. \qquad \text{(例終)}$$

問. 公式(51.7)を用いて，つぎの曲面の表面積を求めよ:

（1） 平面: $x+y+z=a\ (a>0)$ の $\{x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\}$ にある部分.

（2） 曲面: $z=xy$ の 円柱: $x^2+y^2\leqq a^2$ 内にある部分.

（3） 曲面: $z=\tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ の $\{x^2+y^2\leqq a^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0\}\ (a>0)$ にある部分.

（4） 球面: $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$ の 円柱: $x^2+y^2\leqq ax$ 内にある部分.

13

微分方程式

§ 52. 変数分離形

1. 変数分離形

(52. 1) $$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)},$$

あるいは，これを

(52. 2)	$g(y)\,dy=f(x)\,dx$	**(変数分離形の定義式)**

の形の式に表した微分方程式を**変数分離形**という；ここで，$f(x)$ は x だけの関数，$g(y)$ は y だけの関数である．

定理 52.1 変数分離形の微分方程式 (52.1) あるいは (52.2) の解は，つぎの不定積分によってあたえられる：

(52. 3) $$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx. \qquad \textbf{(変数分離形の解の公式)}$$

証明 微分方程式(52.1)の解を $y=\varphi(x)$ とする．これを，ふたたび，(52.1)式に代入すれば，

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=\frac{f(x)}{g(\varphi(x))}.$$

$$\therefore \qquad \int g(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx=\int f(x)\,dx.$$

置換積分法によって，この左辺は $\int g(y)\,dy$ に等しいから，

$$\int g(y)\,dy=\int f(x)\,dx \qquad (y=\varphi(x)).$$ (証明終)

2. 応用例

例.

(52. 4)
$$\frac{dy}{dx}=-2xy.$$

これは，$y\neq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{y}=-2x\,dx$$

と書けるから，変数分離形である．変数分離形の解の公式によって，

$$\int\frac{dy}{y}=\int(-2x)\,dx.$$

$$\therefore\quad \log|y|=-x^2+C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

$$\therefore\quad |y|=e^{-x^2+C_1}=e^{C_1}e^{-x^2}.$$

$$\therefore\quad y=\pm e^{C_1}e^{-x^2}.$$

ここで，$C=\pm e^{C_1}$ とおけば，C_1 が任意定数であることから，C も 0 でない任意定数となって，

(52. 5)
$$y=Ce^{-x^2} \qquad (C \text{ は } 0 \text{ でない任意定数}).$$

さて，$y=0$ のときは，これを微分方程式 (52.4) に代入すれば，$0=0$ となって，やはり，なりたつから，これも解である．したがって，求める解は，

(52. 6)
$$y=Ce^{-x^2} \qquad (C \text{ は任意定数}).$$
（例終）

一般に，微分方程式の解は，なにか条件をつけないかぎり，一意的には定まらない．このように，任意定数をふくむ一般な解を，微分方程式の**一般解**という．

もとの微分方程式に，たとえば，

(52. 7)
$$y(0)=1$$

という条件をつければ，(52.6)式によって，

$$y(0)=C=1,$$

(52. 8)
$$\therefore\quad y=e^{-x^2}$$

となって，解は一意的に定まる．(52.7)式のような条件を，一般に，**初期条件**という．また，(52.8)式のように，一般解 (52.6) の任意定数に特別な値を代入してえられる解を，微分方程式の**特殊解**という．

問. つぎの微分方程式を解け:

(1) $2x\dfrac{dy}{dx}=y.$　　(2) $y\dfrac{dy}{dx}=-x.$

（3）　$y+x\dfrac{dy}{dx}=0.$　　　　（4）　$x\dfrac{dy}{dx}=y-1.$

（5）　$(y+1)\dfrac{dy}{dx}+x=1.$　　　　（6）　$y\dfrac{dy}{dx}-x^2=3.$

（7）　$(1+x)y+x(1-y)\dfrac{dy}{dx}=0.$　　　　（8）　$\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}+\sin x\cos^2 y=0.$

§ 53．同 次 形

1．同 次 形

(53．1)　$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$　**（同次形の定義式）**

の形の微分方程式を**同次形**という．

方程式 (53.1) において，従属変数の y から u への変換：

(53．2)　$$\frac{y}{x}=u;\quad \text{すなわち，}\quad y=xu$$

を行えば，

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

であるから，(53.1)式は，

(53．3)　$$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$$

と書ける．したがって，$f(u)\not\equiv u$ のとき，

(53．4)　$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}.$$

これは，変数分離形である．ゆえに，変数分離形の解の公式 (52.3) (200 ページ) を用いて，

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}=\log|x|+C\qquad\left(u=\frac{y}{x}\right)$$

によって，解を求めることができる．

方程式 (53.1) において，$f(u)\equiv u$ のときは，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x};\quad \text{すなわち，}\quad \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}.$$

したがって，これは，もともと，変数分離形であって，公式 (52.3) (200 ページ) を用いて，解を求めることができる．

つぎに,

$$y=mx \qquad (m\text{は定数}) \tag{53.5}$$

の形の解がある場合には，それに対しては，$u=\frac{y}{x}=m$ となって，(53.2)式は変数変換とみなせない．したがって，(53.4)式からは，この解はえられない．この形の解をうるために，(53.5)式を方程式(53.1)に代入すれば，

$$\frac{dy}{dx}=m=f(m). \tag{53.6}$$

この方程式をみたす定数 m が存在すれば，その m を(53.5)式に代入したものも解となる．

以上の結果をまとめて，つぎの定理がえられる:

> **定理 53.1** 同次形の微分方程式(53.1)は，従属変数の y から u への変換:
>
> $$\underset{\sim\sim\sim}{y=xu} \qquad \textbf{(同次形の変数変換)} \tag{53.7}$$
>
> を行うことによって，変数分離形の微分方程式(53.4)に変換される．
>
> さらに，
>
> $$f(m)=m \tag{53.8}$$
>
> をみたす定数 m が存在すれば，
>
> $$y=mx \tag{53.9}$$
>
> も，方程式(53.1)の解となる．

2. 応 用 例

例.

$$(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}=2xy. \tag{53.10}$$

この微分方程式は，

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}=\frac{2\cdot\frac{y}{x}}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2} \tag{53.11}$$

と書けるから，同次形である．

$$\frac{y}{x}=u;\quad \text{すなわち,}\quad y=xu \tag{53.12}$$

とおけば，

$$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$$

であるから，方程式(53.11)は，

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}$$

と書ける．この式を，順次，変形すれば，

$$x\frac{du}{dx}=\frac{2u}{1-u^2}-u=\frac{u(1+u^2)}{1-u^2},$$

$$\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\frac{dx}{x},$$

$$\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\frac{dx}{x}.$$

これは変数分離形である．ゆえに，公式(52.3)(200ページ)によって，

$$\int\left(\frac{1}{u}-\frac{2u}{1+u^2}\right)du=\int\frac{dx}{x}.$$

$$\therefore \quad \log|u|-\log(1+u^2)=\log|x|+C_1 \qquad (C_1 \text{ は積分定数}).$$

$$\therefore \quad \frac{u}{1+u^2}=\pm e^{C_1}x.$$

ここで，(53.12)式によって，変数 u をもとにもどせば，

$$x^2+y^2=Cy \qquad (C=\pm e^{-C_1}).$$

$$(53.13) \quad \therefore \quad x^2+\left(y-\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{C}{2}\right)^2 \qquad (C \text{ は任意定数で } C\neq 0;\ \text{図53.1}).$$

これが，もとの微分方程式の一般解である．

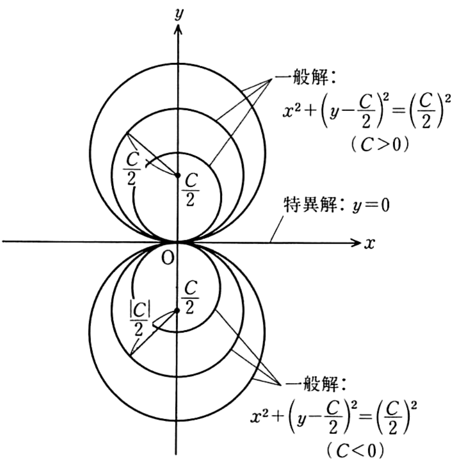


図 53.1

$y=mx$ の形の解があるかどうかを調べるために，(53.8)式にもとづいて，

$$m=\frac{2m}{1-m^2}$$

を解けば，$m=0$. したがって，

(53. 14)　$$y=0$$

も，微分方程式(53.10)の解である．　(例終)

(53.14)式のように，一般解(53.13)にふくまれない解を，微分方程式(53.10)の**特異解**という(図 53.1).

問.　つぎの微分方程式を解け:

(1)　$2xy\dfrac{dy}{dx}=y^2-x^2.$　(2)　$x(x-y)\dfrac{dy}{dx}+y^2=0.$

(3)　$2xy\dfrac{dy}{dx}=x^2-y^2.$　(4)　$x+y\dfrac{dy}{dx}=2y.$

(5)　$(x+y)\dfrac{dy}{dx}=x-y.$　(6)　$x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}.$

(7)　$x\cot\dfrac{y}{x}-y+x\dfrac{dy}{dx}=0.$　(8)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sin\dfrac{y}{x}.$

§54. 完 全 形

1. 完 全 形

(54. 1)　$$p(x,y)+q(x,y)\frac{dy}{dx}=0,$$

あるいは，これを

(54. 2)　$$p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=0$$

の形の式に表した微分方程式において，もし，この左辺が，ある関数 $f(x,y)$ の全微分 (23.6) (80 ページ) として，

(54. 3)　$$df(x,y)\equiv\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$
$$=p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy$$　**(完全形の定義式)**

と表せるとき，すなわち，

(54. 4)　$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=p(x,y),\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=q(x,y)$$

をみたす関数 $f(x,y)$ が存在するとき，微分方程式 (54.1) あるいは (54.2) は，**完全形**であるという．

定理 54.1　完全形の微分方程式 (54.1) または (54.2) の一般解は,

(54.5)　$$f(x,y)=C \qquad (C \text{ は任意定数})$$

(完全形の微分方程式の解の公式)

の陰関数: $y=y(x)$ によってあたえられる; ここで, $f(x,y)$ は(54.4)式をみたす関数である.

証明

(54.6)　$$f(x,y(x))=C$$

の両辺を x について微分すれば, 2 変数合成関数の微分の公式 (25.7) (88 ページ) によって,

(54.7)　$$\frac{d}{dx}f(x,y(x))=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y(x))\frac{dx}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}f(x,y(x))\frac{dy}{dx}$$

$$=p(x,y(x))+q(x,y(x))\frac{dy}{dx} \qquad (\because \quad (54.4)\text{式})$$

$$=0 \qquad (\because \quad (54.6)\text{式}).$$

ゆえに, (54.6)式をみたす $y=y(x)$ は, 方程式 (54.1) の解である.

逆に, $y=y(x)$ が完全形の方程式 (54.1) の解であれば, (54.7)式によって, 任意の定数 C に対して, 方程式 (54.6) をみたす.　(証明終)

定理 54.2　微分方程式 (54.1) が完全形であるための必要十分条件は,

(54.8)　$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial q(x,y)}{\partial x}. \qquad \textbf{(完全形であるための条件)}$$

証明　必要性の証明: 微分方程式 (54.1) が完全形ならば, (54.4)式をみたす関数 $f(x,y)$ が存在するから, 定理 24.1 (84 ページ) によって,

$$p_y(x,y)=f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=q_x(x,y).$$

十分性の証明: 関係式(54.8)がなりたつと仮定する. (54.4)の第 1 式にもとづいて,

(54.9)　$$f(x,y)=\int f_x(x,y)\,dx+\varphi(y)$$

$$\equiv\int p(x,y)\,dx+\varphi(y) \qquad (\varphi(y) \text{ は } y \text{ の任意関数})$$

とおけば,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)\,dx+\varphi'(y).$$

(54.4)の第2式にもとづいて,

$$\frac{\partial}{\partial y}\int p(x,y)\,dx+\varphi'(y)=q(x,y) \tag{54.10}$$

となるように, $\varphi(y)$ をえらぶことができれば, 方程式(54.1)は完全形である.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(q-\frac{\partial}{\partial y}\int p\,dx\right)=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\int p\,dx$$
$$=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int p\,dx\right)$$
$$=\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad (\because \quad (54.8)\text{式}).$$

したがって, $q(x,y)-\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int p(x,y)\,dx$ は, x に無関係な y だけの関数である. ゆえに, (54.10)式がなりたつように, $\varphi(y)$ を定めることができる. その $\varphi(y)$ を(54.9)式に代入すれば, (54.4)式をみたす $f(x,y)$ がえられる.

(証明終)

定理54.2の十分条件の証明法は, 実際に, 完全形の微分方程式の解を求めるときに, そのまま利用される.

2. 応 用 例

例 1. $(2x+2y+1)\,dx+(2x-2y-1)\,dy=0.$

$p=2x+2y+1$, $q=2x-2y-1$ とおけば,

$$p_y=q_x=2.$$

したがって, 定理54.2によって, もとの微分方程式は完全形である. ゆえに, (54.4)式によって,

$$f_x=p=2x+2y+1, \qquad f_y=q=2x-2y-1 \tag{54.11}$$

をみたす関数 $f(x,y)$ が存在する.

$$\therefore \quad f=\int f_x\,dx+\varphi(y)=\int(2x+2y+1)\,dx+\varphi(y) \tag{54.12}$$
$$=x^2+2xy+x+\varphi(y) \qquad (\varphi(y)\text{ は }y\text{ の任意関数}).$$

この両辺を y について偏微分して, (54.11)の第2式を用いれば,

$$f_y=2x+\varphi'(y)=q=2x-2y-1.$$

$$\therefore \quad \varphi'(y)=-2y-1. \qquad \therefore \quad \varphi(y)=-y^2-y+C_1 \quad (C_1\text{ は任意定数}).$$

これを(54.12)式に代入すれば,

$$f=x^2+2xy-y^2+x-y+C_1.$$

したがって, 求める一般解は, 定理54.1によって,

$$f=x^2+2xy-y^2+x-y+C_1=C_2 \qquad (C_2\text{ は任意定数}).$$

ここで，$C=C_2-C_1$ とおけば，求める解は，つぎの形に書ける：

$$x^2+2xy-y^2+x-y=C \qquad (C\text{ は任意定数}). \qquad (\text{例 1 終})$$

3. 積分因子　微分方程式(54.2)が完全形でなくても，適当な関数 $M(x,y)$ を(54.2)式に掛けた

$$M(x,y)p(x,y)\,dx+M(x,y)q(x,y)\,dy=0$$

が，完全形になる場合がある．そのとき，$M(x,y)$ を**積分因子**という．

例 2.　$\sin y\,dx+\cos y\,dy=0.$

この方程式に，$M=e^x$ を掛ければ，

$$e^x\sin y\,dx+e^x\cos y\,dy=0.$$

$(e^x\sin y)_y=(e^x\cos y)_x=e^x\cos y$ だから，この微分方程式は，完全形である．(54.4)の第1式によって，

$$\begin{aligned} f(x,y)&=\int f_x(x,y)\,dx+\varphi(y)\\ &=\int e^x\sin y\,dx+\varphi(y)\\ &=e^x\sin y+\varphi(y) \qquad (\varphi(y)\text{ は } y \text{ の任意関数}). \end{aligned}$$

この両辺を y について偏微分して，(54.4)の第2式を用いれば，

$$f_y=e^x\cos y+\varphi'(y)=q=e^x\cos y.$$

$$\therefore\quad \varphi'(y)=0. \qquad \therefore\quad \varphi(y)=C_1 \quad (C_1\text{ は任意定数}).$$

したがって，求める一般解は，

$$e^x\sin y=C \qquad (C\text{ は任意定数}). \qquad (\text{例 2 終})$$

問.　つぎの微分方程式を解け(付記のカッコ内は，積分因子を示す)：

(1)　$\sin y\,dx+x\cos y\,dy=0.$

(2)　$\cos x\cosh y\,dx+\sin x\sinh y\,dy=0.$

(3)　$(2x-y+1)\,dx+(2y-x-1)\,dy=0.$

(4)　$(x^2+2xy)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0.$

(5)　$y(2y^2+3x)\,dx+x(3y^2+x)\,dy=0 \qquad (M=x).$

(6)　$\cos y\,dx-\sin y\,dy=0 \qquad (M=e^x).$

(7)　$dx+x\,dy=0 \qquad (M=e^y).$

(8)　$y\,dx+x\log|x|\,dy=0 \qquad \left(M=\dfrac{1}{x}\right).$

§ 55. 1 階線形方程式

1. 1 階線形方程式の例

例.

(55. 1) $$y'-y=x.$$

まず，**同次方程式**:

(55. 2) $$y'-y=0$$

を考える．これは，$y\neq 0$ のとき，

$$\frac{dy}{y}=dx$$

と書けるから，変数分離形である．したがって，§ 52 の例 (201 ページ) と同様にして，順次に，

$$\int\frac{dy}{y}=\int dx.$$

$$\therefore\quad \log|y|=x+C_1\qquad (C_1\text{ は積分定数}).$$

(55. 3) $$\therefore\quad y=ce^x\qquad (c\text{ は任意定数}).$$

これが，同次方程式(55.2)の一般解である．

さて，**非同次方程式**(55.1)の解をうるために，(55.3)式において，c を x の関数 $c(x)$ と考えた式:

(55. 4) $$y=c(x)e^x$$

が，方程式(55.1)をみたすように，$c(x)$を決定しようというわけである．(55.4) 式を方程式(55.1)に代入すれば，

$$y'-y=(c'(x)e^x+c(x)e^x)-c(x)e^x=c'(x)e^x=x.$$

$$\therefore\quad c'(x)=xe^{-x}.$$

$$\therefore\quad c(x)=\int xe^{-x}\,dx=-xe^{-x}+\int e^{-x}\,dx$$

$$=-xe^{-x}-e^{-x}+C.$$

これを，(55.4)式に代入したものが，求める一般解である:

$$y=(-xe^{-x}-e^{-x}+C)e^x=-x-1+Ce^x\qquad (C\text{ は任意定数}).$$

(例終)

同次方程式(55.2)の一般解(55.3)から，任意定数 c を x の関数 $c(x)$ と考えて，上のように，非同次方程式(55.1)の解をうる方法を，一般に，**定数変化法**という．この方法は，微分方程式の解法で，非常に重要な方法である．

2. 1階線形微分方程式 の一般な形は,

$$y'+p(x)y=q(x) \qquad (y=y(x)). \tag{55.5}$$

この一般の場合も, 1項の例と, まったく同様な方法で解くことができる. それを示そう.

> **定理 55.1** 1階線形微分方程式 (55.5) の一般解は,
>
> $$y=e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx+C\right) \qquad (C\text{ は任意定数}) \tag{55.6}$$
>
> によってあたえられる.

証明 まず, 同次方程式:

$$y'+p(x)y=0 \tag{55.7}$$

を考える. これは,

$$\frac{dy}{y}=-p(x)\,dx$$

と書けるから, 変数分離形 (52.2) (200ページ) である. したがって, 定理52.1 (200 ページ) によって,

$$\int\frac{dy}{y}=\log|y|=-\int p(x)\,dx+C_1.$$

$$\therefore \quad y=ce^{-\int p(x)\,dx} \qquad (c=\pm e^{C_1}). \tag{55.8}$$

$y=0$ も, 方程式 (55.7) の解であることがわかるから, 同次方程式 (55.7) の一般解は,

$$y=ce^{-\int p(x)\,dx} \qquad (c\text{ は任意定数}).$$

さて, (55.8)式において, c を x の関数 $c(x)$ と考えた式:

$$y=c(x)e^{-\int p(x)\,dx} \tag{55.9}$$

が非同次方程式(55.5)をみたすように $c(x)$ を決定しよう(**定数変化法**). (55.9)式を方程式 (55.5) に代入すれば,

$$y'+p(x)y=\frac{d}{dx}\left\{c(x)e^{-\int p(x)\,dx}\right\}+p(x)c(x)e^{-\int p(x)\,dx}$$

$$=c'(x)e^{-\int p(x)\,dx}=q(x).$$

$$\therefore \quad c'(x)=q(x)e^{\int p(x)\,dx}.$$

$$\therefore \quad c(x)=\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx+C.$$

これを, (55.9)式に代入して, (55.6)式がえられる.　　　　(証明終)

問． つぎの微分方程式を解け:

（1） $y'+y=x.$　　（2） $y'+\dfrac{y}{x}=1.$

（3） $xy'+y=x^2.$　　（4） $y'-y=\sin x.$

（5） $y'-xy=x.$　　（6） $y'\cos x+y\sin x=1.$

（7） $xy'+y=\cos x.$　　（8） $\dfrac{1}{\cos^2 y}y'+\tan y=x.$

§56． 2階線形同次方程式

1． オイラーの関係　　指数関数のテイラー展開(19.2)(63ページ)にもとづいて，虚数 ix （i は虚数単位: $i=\sqrt{-1}$）の指数関数 e^{ix} を，

$$e^{ix}\equiv 1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots \qquad (|x|<\infty) \tag{56.1}$$

によって定義する．そのとき，

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ i^7=-i,\ \cdots$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} e^{ix}=&1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \\ &+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right) \qquad (|x|<\infty). \end{aligned}$$

これと，$\cos x$，$\sin x$ のテイラー展開(19.4)，(19.3)(64ページ)を比較して，

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad \text{（オイラーの関係）} \tag{56.2}$$

がえられる．この式で，x に $-x$ を代入すれば，

$$e^{-ix}=\cos(-x)+i\sin(-x)=\cos x-i\sin x. \tag{56.3}$$

(56.2)式に(56.3)式を加えて，2で割れば，

$$\cos x=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}. \tag{56.4}$$

(56.2)式から(56.3)式を引いて，$2i$ で割れば，

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}. \tag{56.5}$$

つぎの公式がえられる:

(56.6)　　$(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$　　($\lambda = \alpha + i\beta$ は複素定数).

証明　オイラーの関係によって,

$$e^{\lambda x} = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x).$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad (e^{\lambda x})' &= \{e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\}' \\ &= \alpha e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) + e^{\alpha x}(-\beta\sin\beta x + i\beta\cos\beta x) \\ &= (\alpha+i\beta)e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) \\ &= (\alpha+i\beta)e^{(\alpha+i\beta)x}\end{aligned}$$

(∵　オイラーの関係).　　(証明終)

2. 同次方程式の解

定理 56.1　2 階線形同次微分方程式:

(56.7)　　$y'' + by' + cy = 0$　　($y = y(x)$; b, c は定数)

の**固有方程式**を,

$$\rho^2 + b\rho + c = 0$$

によって定義する. この固有方程式の 2 つの解を λ, μ とする:

(56.8)　　$\rho^2 + b\rho + c = (\rho-\lambda)(\rho-\mu) = 0$　　(λ, μ は複素数).

そのとき, 微分方程式 (56.7) の一般解は, つぎのようにあたえられる:

(i)　λ, μ が実数で, $\lambda \neq \mu$ ならば,

(56.9)　　$y = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}$　　(A, B は任意定数);

(ii)　$\lambda = \mu$ (重複解) ならば,

(56.10)　　$y = (Ax + B)e^{\lambda x}$　　(A, B は任意定数);

(iii)　$\lambda = \alpha + i\beta$, $\mu = \alpha - i\beta$ ($\beta \neq 0$) ならば,

(56.11)　　$y = Ae^{\lambda x} + Be^{\mu x}$　　(A, B は任意定数)

(56.12)　　$= e^{\alpha x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x)$　　(C, D は任意定数).

証明　まず, 定理 55.1 (210 ページ) によって,

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)y \equiv \frac{dy}{dx} - \lambda y = 0 \qquad (\lambda \text{ は複素定数})$$

の一般解は, $y = Ae^{\lambda x}$ (A は任意定数) によってあたえられる.

(56.8)式によって, 微分方程式 (56.7) は,

$$y'' + by' + cy = \left(\frac{d}{dx} - \mu\right)\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)y = 0$$

と書けるから，$y=Ae^{\lambda x}$ は，方程式 (56.7) の解でもある．同様にして，$y=Be^{\mu x}$ (B は任意定数) も方程式 (56.7) の解である．したがって，$\lambda \neq \mu$ ならば，

$$y=Ae^{\lambda x}+Be^{\mu x}$$

も方程式 (56.7) の解であって，これが，一般解をあたえる．

$\lambda=\mu$ ならば，1つの解は，$y=Ae^{\lambda x}$．もう1つの解をうるには，定数変化法によればよい．

(56. 13) $$y=A(x)e^{\lambda x}$$

とおいて，方程式 (56.7) に代入すれば，

$$\begin{aligned} y''+by'+cy &= \left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)^2 A(x)e^{\lambda x} \\ &= \left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)\{(A'(x)e^{\lambda x}+\lambda A(x)e^{\lambda x})-\lambda A(x)e^{\lambda x}\} \\ &= \left(\frac{d}{dx}-\lambda\right)A'(x)e^{\lambda x}=A''(x)e^{\lambda x}=0. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad A''(x)=0.$$

$$\therefore \quad A(x)=Bx+C \qquad (B,\ C \text{ は任意定数}).$$

これを(56.13)式に代入すれば，(56.10)式がえられる．

$\lambda=\alpha+i\beta$, $\mu=\alpha-i\beta$ ならば，オイラーの関係によって，

$$\begin{aligned} y &= Ae^{\lambda x}+Be^{\mu x}=Ae^{\alpha x+i\beta x}+Be^{\alpha x-i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}\{(A+B)\cos\beta x+i(A-B)\sin\beta x\} \\ &= e^{\alpha x}(C\cos\beta x+D\sin\beta x) \qquad (C=A+B,\ D=i(A-B)). \end{aligned}$$

したがって，(56.12)式がえられる．ここで，A, B は任意定数であったから，C, D も任意定数である． (証明終)

定理 56.1 によって，同次方程式 (56.7) の一般解 $y(x)$ は，一般に，

$$y(x)=A\,y_1(x)+B\,y_2(x) \qquad (A,\ B \text{ は任意定数})$$

の形をしている．とくに，$y_1(x)$, $y_2(x)$ も方程式 (56.7) の解である．このような解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ を，一般に，同次方程式 (56.7) の**基本解**という．

3. 応 用 例

例 1. $y''-3y'+2y=0$.

固有方程式: $\rho^2-3\rho+2=(\rho-1)(\rho-2)=0$.

したがって，一般解は，

$$y=Ae^{x}+Be^{2x} \qquad (A,\ B \text{ は任意定数}).$$

(例1終)

例 2. $y''+2y+y=0$.

固有方程式: $\rho^2+2\rho+1=\{\rho-(-1)\}^2=0$.

したがって，一般解は，

$$y=e^{-x}(Ax+B) \qquad (A, B \text{ は任意定数}). \qquad (\text{例 2 終})$$

例 3. $y''-4y'+13y=0$.

固有方程式: $\rho^2-4\rho+13=\{\rho-(2+3i)\}\{\rho-(2-3i)\}=0$.

したがって，一般解は，

$$y=e^{2x}(A\cos 3x+B\sin 3x) \qquad (A, B \text{ は任意定数}). \qquad (\text{例 3 終})$$

問. つぎの微分方程式を解け:

(1) $y''-y'-2y=0$.　　(2) $y''-6y'+9y=0$.

(3) $y''-2y'+2y=0$.　　(4) $y''+5y'-6y=0$.

(5) $4y''-12y'+9y=0$.　　(6) $y''+2y'+5y=0$.

(7) $y''-ay'=0 \quad (a\neq 0)$.　　(8) $y''+a^2y=0 \quad (a\neq 0)$.

§ 57. 2階線形非同次方程式

1. 非同次微分方程式:

(57.1) $$y''+by'+cy=f(x) \qquad (y=y(x);\ b, c \text{ は定数})$$

の解を求める方法を述べよう.

方程式 (57.1) の左辺を 0 とおいた同次方程式をつくる:

(57.2) $$y''+by'+cy=0.$$

> **定理 57.1** 同次方程式 (57.2) の一般解を $y(x)$, 非同次方程式 (57.1) の**特殊解** (特別な解) を $Y(x)$ とすれば，非同次方程式 (57.1) の一般解は，$y(x)+Y(x)$ によってあたえられる.

証明
$$\begin{aligned}&\{y(x)+Y(x)\}''+b\{y(x)+Y(x)\}'+c\{y(x)+Y(x)\}\\&=\{y''(x)+by'(x)+cy(x)\}+\{Y''(x)+bY'(x)+cY(x)\}\\&=0+f(x)\end{aligned}$$

であるから，$y(x)+Y(x)$ は，非同次方程式 (57.1) の解である.

逆に，$z(x)$ を非同次方程式 (57.1) の一般解とすれば，

$$\begin{aligned}&\{z(x)-Y(x)\}''+b\{z(x)-Y(x)\}'+c\{z(x)-Y(x)\}\\&=\{z''(x)+bz'(x)+cz(x)\}-\{Y''(x)+bY'(x)+cY(x)\}\\&=f(x)-f(x)=0.\end{aligned}$$

したがって，$z(x)-Y(x)$ は，同次方程式 (57.2) の解である.　　(証明終)

定理 56.1 と定理 57.1 によって，同次方程式 (57.2) の基本解の組を $y_1(x)$, $y_2(x)$, 非同次方程式(57.1)の特殊解を $Y(x)$ とすれば，非同次方程式 (57.1) の一般解 $y(x)$ は，つぎの式であたえられる:

$$y(x)=A\,y_1(x)+B\,y_2(x)+Y(x) \qquad (A,\,B \text{ は任意定数}).$$

定理 57.2 同次方程式 (57.2) の基本解の組: $y_1(x)$, $y_2(x)$ に対して，

(57.3) $$\begin{cases} A'(x)\,y_1(x)+B'(x)\,y_2(x)=0, \\ A'(x)\,y_1'(x)+B'(x)\,y_2'(x)=f(x) \end{cases}$$

をみたす関数: $A(x)$, $B(x)$ を求めれば，

(57.4) $$y(x)=A(x)\,y_1(x)+B(x)\,y_2(x)$$

は，非同次方程式 (57.1) の解をあたえる. **(定数変化法)**

証明 関係式(57.3)を用いれば，(57.4)式の $y(x)$ に対して，

(57.5) $$\begin{aligned} y'(x)&=\{A'(x)y_1(x)+B'(x)y_2(x)\}+\{A(x)y_1'(x)+B(x)y_2'(x)\} \\ &=A(x)y_1'(x)+B(x)y_2'(x), \end{aligned}$$

(57.6) $$\begin{aligned} y''(x)&=\{A'(x)y_1'(x)+B'(x)y_2'(x)\}+\{A(x)y_1''(x)+B(x)y_2''(x)\} \\ &=f(x)+\{A(x)y_1''(x)+B(x)y_2''(x)\}. \end{aligned}$$

$y_1(x)$, $y_2(x)$ が，同次方程式 (57.2) の基本解であることに注意すれば，(57.4), (57.5), (57.6) の 3 つの式から，

$$y''(x)+b\,y'(x)+c\,y(x)=f(x).$$

したがって，(57.4)式の $y(x)$ は，非同次方程式 (57.1) の解である.

(証明終)

2. 応用例

例. $y''-3y'+2y=x$.

(57.7) $$y''-3y'+2y=0$$

の基本解の組は，§56 の例 1 (213 ページ) によって，$y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$.

(57.3) の関係式をつくれば，

$$\begin{cases} A'e^x+B'e^{2x}=0, \\ A'e^x+B'\cdot 2e^{2x}=x. \end{cases}$$

$$\therefore \quad A'=\frac{-xe^{2x}}{2e^{3x}-e^{3x}}=-xe^{-x}, \qquad B'=\frac{xe^x}{2e^{3x}-e^{3x}}=xe^{-2x}.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} A(x) = -\int xe^{-x}\,dx = xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx = xe^{-x} + e^{-x} + C_1, \\ B(x) = \int xe^{-2x}\,dx = -\dfrac{1}{2}xe^{-2x} + \dfrac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx \\ \qquad\qquad = -\dfrac{1}{2}xe^{-2x} - \dfrac{1}{4}e^{-2x} + C_2. \end{cases}$$

したがって，もとの非同次式の特殊解は，

$$y = (xe^{-x} + e^{-x})e^{x} + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)e^{2x}$$

$$= x + 1 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} = \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

求める一般解は，

$$y = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{x}{2} + \frac{3}{4}.$$

（例終）

問． つぎの微分方程式を解け:

（1） $y'' - 3y' + 2y = 2x - 1.$

（2） $y'' - 2y' + 2y = x^2 - 1.$

（3） $y'' - 6y' + 8y = e^{3x}.$

（4） $y'' - 4y' + 4y = e^{x}.$

（5） $y'' + 8y' + 17y = 2e^{-3x}.$

（6） $y'' + y = 2\cos x.$

（7） $y'' - y' - 2y = \sin x.$

（8） $y'' - 2y' + 2y = 2e^{x}\cos x.$

14

数列と級数

§ 58. 無限数列

1. 無限数列の収束　無限数列:

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$$

において，n をかぎりなく大きくしたときに，a_n が一定の値 α にかぎりなく近づくとき，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は α に**収束する**，または，数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限値**は α であるといい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$$

または，

$$a_n\to\alpha \qquad (n\to\infty)$$

によって表す．

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ において，

$$a_1=c,\ a_2=c,\ \cdots,\ a_n=c,\ \cdots$$

であるとき，

$$\lim_{n\to\infty} a_n=c$$

と約束する．

数列の極限値については，つぎの定理が基本的である．

定理 58.1　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha,\qquad \lim_{n\to\infty} b_n=\beta$

のとき，

（i）　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} c\,a_n=c\,\alpha$　　（c は定数）;

（ii） $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$;

（iii） $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$;

（iv） $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$. **（数列の極限値の基本定理）**

2．無限数列の発散・振動　収束しない数列は，**発散する**という．

$n\to\infty$ のとき，$a_n\to\infty$ ならば，$\{a_n\}$ は**正の無限大に発散する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

または，

$$a_n \to \infty \qquad (n\to\infty)$$

によって表す．

$n\to\infty$ のとき，$a_n\to-\infty$ ならば，$\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

または，

$$a_n \to -\infty \qquad (n\to\infty)$$

によって表す．

正または負の無限大に発散する数列は，**定発散する**という．定発散しない発散数列は，**不定発散する**，または，**振動する**という．

たとえば，数列：

$$\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}: \qquad -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^n,\ \cdots;$$

$$\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}: \qquad -2,\ 4,\ -8,\ \cdots,\ (-2)^n,\ \cdots;$$

などは，いずれも振動する．

3．無限等比数列　$\{r^n\}_{n=0}^{\infty}$ の極限について，しらべよう．

（i） $r>1$ のとき，

$$r = 1 + t \qquad (t>0)$$

とおけて，2 項定理（§ 11 の 3 項（38 ページ））によって，

$$r^n = (1+t)^n = 1 + \binom{n}{1}t + \binom{n}{2}t^2 + \cdots + t^n.$$

$$\therefore \quad r^n > 1 + nt \qquad (n \geqq 2).$$

$n\to\infty$ のとき，$nt\to\infty$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \infty.$$

(ii)　$r=1$ のとき，

$$r^n=1 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

だから，

$$\lim_{n\to\infty} r^n=1.$$

(iii)　$0<r<1$ のとき，

$$r^n=\frac{1}{\left(\frac{1}{r}\right)^n}.$$

(i)の結果によって，$n\to\infty$ のとき，$\left(\frac{1}{r}\right)^n\to\infty$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0.$$

(iv)　$r=0$ のとき，

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0.$$

(v)　$-1<r<0$ のとき，

$$r^n=(-1)^n t^n \qquad (0<t<1;\ n=1,2,\cdots)$$

とおけて，(iii)の結果によって，$n\to\infty$ のとき，$t^n\to 0$ だから，

$$\lim_{n\to\infty} r^n=0.$$

(vi)　$r=-1$ のとき，

$\{r^n\}=\{(-1)^n\}=\{-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\cdots\}$ は振動する．

(vii)　$r<-1$ のとき，

$|r|>1$ だから，(i)の結果によって，$n\to\infty$ のとき，$|r|^n\to\infty$. r^n の符号は，

n が偶数のとき正，　n が奇数のとき負．

したがって，

$\{r^n\}$ は振動する．

(i)〜(vii)から，つぎの結果がえられる：

$$(58.1)\qquad \begin{cases} r>1 & \text{ならば，}\quad \lim_{n\to\infty} r^n=\infty; \\ r=1 & \text{ならば，}\quad \lim_{n\to\infty} r^n=1; \\ -1<r<1 & \text{ならば，}\quad \lim_{n\to\infty} r^n=0; \\ r\leqq -1 & \text{ならば，}\quad \{r^n\}\ \text{は振動する．} \end{cases}$$

4. 単調数列　数列 $\{a_n\}$ において,

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots$$

であるとき, $\{a_n\}$ は**増加数列**であるという. また,

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$$

であるとき, $\{a_n\}$ は**減少数列**であるという. 増加数列と減少数列を総称して, **単調数列**という.

> **定理 58.2**　増加数列 $\{a_n\}$ が, 上に有界: $a_n \leqq M$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば, $\{a_n\}$ は収束する. 減少数列 $\{a_n\}$ が, 下に有界: $a_n \geqq M$ $(n=1, 2, \cdots)$ ならば, $\{a_n\}$ は収束する.

証明は省略するが, 直観的には明らかであろう(図 58.1).

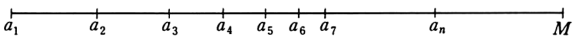


図 58.1

例.　無限数列:

(58.2)　$$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots$$

は, 増加数列であって, 上に有界である:

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \cdots < \frac{n-1}{n} < \cdots < 1.$$

したがって, 無限数列 (58.2) は収束する. 実際,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\dfrac{1}{n}}{1} = 1. \qquad \text{(例終)}$$

問 1.　第 n 項が, つぎの式であたえられる数列の極限値を求めよ:

(1)　$n^2 - n$.　　(2)　$(-1)^n n$.

(3)　$\dfrac{(-1)^n}{n}$.　　(4)　$\dfrac{2-n}{3n-5}$.

(5)　$\dfrac{n^2-n-6}{2n^2+3n+6}$.　　(6)　$\dfrac{2n+1}{n^2+n+3}$.

(7)　$\dfrac{n^2+2n+3}{n+2}$.　　(8)　$\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

(9) $\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}}$.

(10) $\dfrac{\sin n\theta}{n}$ (θ は定数).

(11) $(-3)^n$.

(12) $\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n-1}$

(13) $\dfrac{(\sqrt{5})^n}{2^n}$.

(14) $(1+a^2)^n$ $(a \neq 0)$.

(15) $\left(\dfrac{1}{1+a^2}\right)^n$ $(a \neq 0)$.

(16) $\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$.

(17) $\dfrac{(-3)^n}{3^n+2^n}$.

(18) $\dfrac{2^n}{n}$.

(19) $\sqrt[n]{n}$.

(20) $\dfrac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$.

問 2. つぎの命題は正しいか？ 正しくない場合には, 反例をあげよ:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ ならば, $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=-\infty$ ならば, $\lim_{n\to\infty} a_nb_n=-\infty$.

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n=-\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ ならば, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=-1$.

§59. 無 限 級 数

1. 無限級数の収束 無限数列 $\{a_n\}$ の各項を, 順に加えていった形の式:

(59.1) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

を, **無限級数**または**級数**という. 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 (**第 n 部分和**という) を,

(59.2) $$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

とすると, 無限数列:

(59.3) $$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

がえられる. この数列が収束して, その極限値が S のとき, 無限級数 (59.1) は S に**収束する**, または, 無限級数 (59.1) の**和**は, S であるといい,

$$a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots=S,$$

または,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=S$$

によって表す.

収束しない無限級数は，**発散する**という．

> **定理 59.1** 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束すれば，
>
> (59.4) $$a_n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

証明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$，$a_1+a_2+\cdots+a_n=S_n$ とおけば，

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S-S=0 \qquad (n\to\infty). \qquad \text{(証明終)}$$

つぎの例が示すように，条件(59.4)は無限級数 $\sum a_n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ の簡略記号}\right)$ が収束するための十分条件ではない．

例． $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

§41の例7(145ページ)によって，

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} > \log(n+1) \to \infty \qquad (n\to\infty).$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} S_n = \infty. \qquad \text{(例終)}$$

2．等比級数

(59.5) $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a+ar+\cdots+ar^{n-1}+\cdots \qquad (a\neq 0)$$

の形の級数を**等比級数**という．等比級数(59.5)の第 n 部分和を

(59.6) $$S_n = a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$$

とすれば，

(59.7) $$rS_n = \quad ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

であるから，(59.6)式から(59.7)式を引けば，

$$(1-r)S_n = a-ar^n = a(1-r^n).$$

また，$r=1$ のときは，明らかに，$S_n=na$ であるから，つぎの公式がえられる：

> (59.8) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} ar^{k-1} = \begin{cases} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} & (r\neq 1), \\ na & (r=1). \end{cases}$$
>
> **(有限等比級数の和の公式)**

したがって，等比級数(59.5)は，$|r|<1$ のときにかぎって収束し，

(59.9) $$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad (|r|<1).$$

(無限等比級数の和の公式)

問 1. つぎの無限級数の和を求めよ:

(1) $1+2+\cdots+n+\cdots.$

(2) $1-1+1-1+\cdots+(-1)^{n-1}+\cdots.$

(3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\cdots.$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}.$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}.$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}.$

(7) $27+9+3+1+\dfrac{1}{3}+\cdots.$

(8) $2-4+8-16+\cdots.$

(9) $1-\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{9}-\dfrac{8}{27}+\cdots.$

(10) $\sqrt{3}-1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}-\dfrac{1}{3}+\cdots.$

***問 2.** §41 の問 3 (147 ページ) および公式 (46.6) (169 ページ) を用いて, 例にならって, つぎのことを証明せよ:

級数: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ は, $\begin{cases} \alpha>1 & \text{のとき収束,} \\ 0<\alpha\leqq 1 & \text{のとき発散.} \end{cases}$

§60. 正 項 級 数

1. 基本性質 $a_n>0$ $(n=1, 2, \cdots)$ である級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を**正項級数**という.

定理 60.1 正項級数 $\sum a_n$ が, 収束するための必要十分条件は, その部分和の列: $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(S_n=a_1+\cdots+a_n)$ が, 有界であることである.

証明　正項級数$\sum a_n$の部分和の列$\{S_n\}$は，増加数列である：

$$S_n=a_1+\cdots+a_n<a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}=S_{n+1}.$$

ゆえに，$\{S_n\}$は∞に発散するか，または有界である．

したがって，$\{S_n\}$が収束すれば，$\{S_n\}$は有界である．

逆に，$\{S_n\}$が有界ならば，定理58.2（220ページ）によって，$\{S_n\}$は収束する．　（証明終）

定理 60.2　収束する正項級数$\sum a_n$について，その項の順序を任意にかえてつくった級数$\sum a_{k_n}$も収束し，和の値はかわらない．

証明　$\sum a_n$の和をS，$\sum a_n$の第n部分和をS_nとする．$\sum a_n$の部分和：

$$T_n=a_{k_1}+a_{k_2}+\cdots+a_{k_n}$$

において，$k_1, k_2, \cdots, k_n$の最大のものをNとすれば，

(60.1)　$$T_n\leqq S_N\leqq S.$$

ゆえに，T_nは上に有界であるから，定理60.1によって，$\sum a_{k_n}$は収束する．その和をTとすれば，不等式(60.1)によって，

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}=\lim_{n\to\infty} T_n=T\leqq S.$$

他方において，$\sum a_n$は，$\sum a_{k_n}$の項の順序をかえたものであるから，上の証明から，$S\leqq T$である．したがって，$S=T$．　（証明終）

2．比較判定法

定理 60.3　2つの正項級数：$\sum a_n$，$\sum b_n$において，

(60.2)　$$a_n\leqq b_n\qquad (n=1, 2, \cdots)$$

であるとき，

（i）　$\sum b_n$が収束すれば，　$\sum a_n$も収束する．

（ii）　$\sum a_n$が発散すれば，　$\sum b_n$も発散する．　**（比較判定法）**

証明

$$S_n=a_1+\cdots+a_n,$$

$$T_n=b_1+\cdots+b_n$$

とおけば，条件(60.2)によって，

(60.3)　$$S_n=a_1+\cdots+a_n\leqq b_1+\cdots+b_n=T_n\qquad (n=1, 2, \cdots).$$

（i）　$\sum b_n$が収束すれば，定理60.1によって，部分和の列$\{T_n\}$は有界である：$T_n\leqq T$　$(n=1, 2, \cdots)$．そのとき，不等式(60.3)によって，

$$S_n \leqq T_n \leqq T \qquad (n=1, 2, \cdots);$$

すなわち，$\{S_n\}$ は有界である．そのとき，ふたたび，定理 60.1 によって，$\sum a_n$ は収束する．

（ii）は（i）の対偶である． （証明終）

例 1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ （§59 の問 2 (223 ページ) 参照）．

$$2n^2 \geqq n^2+n=n(n+1) \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

であるから，

$$\frac{1}{n^2} \leqq \frac{2}{n(n+1)} \qquad (n=1, 2, \cdots). \tag{60.4}$$

$$\begin{aligned} T_n &\equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= 2\left\{\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right\} \\ &= 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

したがって，不等式 (60.4) に注意すれば，比較判定法によって，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{は収束する．}$$

（例 1 終）

3. コーシーのべき根判定法

> **定理 60.4** 正項級数 $\sum a_n$ において，
>
> $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad (\leqq \infty) \tag{60.5}$$
>
> であるとき，
>
> （i） $0 \leqq r < 1$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．
>
> （ii） $1 < r \leqq \infty$ ならば，$\sum a_n$ は発散する．
>
> **（コーシーのべき根判定法）**

証明 （i） $r<\rho<1$ をみたす ρ をえらぶ．そのとき，条件 (60.5) によって，$n\to\infty$ のとき，$\sqrt[n]{a_n}$ はかぎりなく r に近づくから，十分大きい自然数 n_0 をえらべば，

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho \qquad (n=n_0, n_0+1, \cdots).$$

$$\therefore \quad a_n < \rho^n \qquad (n=n_0, n_0+1, \cdots).$$

公式(59.9) (223 ページ)によって，$\sum_{n=n_0}^{\infty} \rho^n$ $(0<\rho<1)$ は収束するから，比較判定法によって，$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ も収束する．有限級数 $\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n$ を加えても，収束することにかわりはないから，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する．

（ii） $1<r\leqq\infty$ ならば，十分大きい自然数 n_0 をえらべば，

$$\sqrt[n]{a_n}>1 \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

$$\therefore \quad a_n>1 \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

したがって，定理 59.1(222 ページ) によって，$\sum a_n$ は発散する．　（証明終）

例 2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na+b}{nc+d}\right)^n \qquad (a,\ b,\ c,\ d>0).$

$$\sqrt[n]{a_n}\equiv\frac{na+b}{nc+d}=\frac{a+\dfrac{b}{n}}{c+\dfrac{d}{n}} \to \frac{a}{c} \qquad (n\to\infty).$$

したがって，コーシーのべき根判定法によって，もとの級数は，

$$\begin{cases} a<c \text{ のとき，} & \text{収束.} \\ a>c \text{ のとき，} & \text{発散.} \end{cases}$$

（例 2 終）

4．ダランベルの比判定法

> **定理 60.5**　正項級数 $\sum a_n$ において，
>
> (60.6)　$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=r \quad (\leqq\infty)$$
>
> であるとき，
>
> （i） $0\leqq r<1$ ならば，$\sum a_n$ は収束する．
>
> （ii） $1<r\leqq\infty$ ならば，$\sum a_n$ は発散する．**（ダランベルの比判定法）**

証明　（i） $r<\rho<1$ をみたす ρ をえらぶ．そのとき，条件(60.6) によって，十分大きい自然数 n_0 をえらべば，

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\rho \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

$$\therefore \quad \frac{a_{n+1}}{\rho^{n+1}}<\frac{a_n}{\rho^n} \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

したがって，

$$K=\frac{a_{n_0}}{\rho^{n_0}}$$

とおけば,

$$a_n \leqq K\rho^n \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

公式(59.9)(223ページ)によって, $\sum_{n=n_0}^{\infty} K\rho^n$ $(0<\rho<1)$ は収束するから, 比較判定法によって, $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ も収束する. 有限級数 $\sum_{n=1}^{n_0-1} a_n$ を加えても, 収束することにかわりはないから, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する.

(ii) $1<r\leqq\infty$ ならば, 条件(60.6)によって, 十分大きい自然数 n_0 をえらべば,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

$$\therefore \quad a_{n+1}>a_n>0 \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

したがって, 定理59.1(221ページ)によって, $\sum a_n$ は発散する. (証明終)

例 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(x>0)$.

$a_n=\frac{x^n}{n!}$ とおけば,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{x^n}=\frac{x}{n+1} \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

ゆえに, ダランベルの比判定法によって, $x>0$ のとき, $\sum \frac{x^n}{n!}$ は収束する(§62の例2(230ページ)参照). (例3終)

問 1. §59の問2(223ページ)の結果と, 比較判定法を用いて, つぎの級数の収束, 発散を判定せよ:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$.　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.　(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.　(6) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$.

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}$.　(8) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{n}$.

問 2. コーシーのべき根判定法を用いて, つぎの級数の収束, 発散を判定せよ:

(1) $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n-2}{3n-5}\right)^n$.　(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$.

問 3. ダランベルの比判定法を用いて，つぎの級数の収束，発散を判定せよ：

（1） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3\cdot 5\cdots(2n+1)}$.　　（2） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n}$.

（3） $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $(0<x<1)$.

§61. 交 代 級 数

1. ライプニッツの定理

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

$$(a_n > 0;\ n = 1, 2, \cdots)$$

の形の級数を**交代級数**という．

定理 61.1 交代級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n-1}a_n + \cdots$$

$$(a_n > 0;\ n = 1, 2, \cdots)$$

において，

$\{a_n\}$ が減少数列で，　$a_n \to 0$　　$(n \to \infty)$

ならば，この級数は収束する．　　**（ライプニッツの定理）**

証明 この級数の第 n 部分和を S_n とすれば，

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqq S_{2n},$$

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leqq a_1.$$

したがって，$\{S_{2n}\}$ は有界な増加数列となるから，定理 58.2 (220 ページ) によって，$\{S_{2n}\}$ は収束する：

$$S_{2n} \to S \qquad (n \to \infty).$$

また，$a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \to S \qquad (n \to \infty).$$

したがって，

$$S_n \to S \qquad (n \to \infty). \qquad \text{(証明終)}$$

例. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots.$

この級数は，交代級数で，

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}, \qquad \frac{1}{n}\to 0 \qquad (n\to\infty)$$

だから，ライプニッツの定理によって，収束する． (例終)

問. ライプニッツの定理と定理 59.1 (222 ページ) を利用して，つぎの級数の収束，発散を判定せよ:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}.$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\log n}.$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sqrt[n]{a}$ $(a>0).$

§62. 絶対収束級数

1. 条件収束級数 級数 $\sum a_n$ の各項の絶対値を項とする級数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

が収束するとき，もとの級数 $\sum a_n$ は**絶対収束**するといい，$\sum a_n$ を**絶対収束級数**という．

級数 $\sum a_n$ は収束するが，絶対収束しないとき，$\sum a_n$ は**条件収束**するといい，$\sum a_n$ を**条件収束級数**という．

例 1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$

ライプニッツの定理 (228 ページ) によって，この級数は収束する (§61 の例 (このページの上))．また，§59 の例 (222 ページ) によって，この級数は絶対収束しない．したがって，この級数は条件収束級数である． (例 1 終)

2. 絶対収束級数の収束

定理 62.1 絶対収束級数 $\sum a_n$ は収束する．

証明 $\sum a_n$ の正の項だけをとってつくった級数を $\sum p_n$ とし，負の項だけをとってつくった級数を $\sum(-q_n)$ とする．

$\sum a_n$ は絶対収束級数であるから $\sum|a_n|$ は収束し，数列：$\{p_n\}$，$\{q_n\}$ は数列 $\{|a_n|\}$ の**部分列**（数列の一部分をとってえられる数列）であるから，$\sum p_n$，$\sum q_n$ はともに収束する．そのとき，

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n$$
$$= p_1 + \cdots + p_m - (q_1 + \cdots + q_l)$$

と書けて，

$$p_1 + \cdots + p_m \to \sum p_k \qquad (n \to \infty),$$
$$q_1 + \cdots + q_l \to \sum q_k \qquad (n \to \infty)$$

であるから，$\{S_n\}$ も収束して，

$$S_n \to \sum a_k = \sum p_k - \sum q_k \qquad (n \to \infty). \qquad \text{（証明終）}$$

例 2.

(62．1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

§60 の例 3（227 ページ）によって，この級数は $x>0$ のとき収束する．$x=0$ のときは，明らかに収束するから，級数：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!}$$

は，すべての x $(-\infty<x<\infty)$ に対して収束する．すなわち，級数（62.1）は，すべての x $(-\infty<x<\infty)$ に対して絶対収束する．そのとき，定理 62.1 によって，級数（62.1）は，$-\infty<x<\infty$ で収束する．　（例 2 終）

問． つぎの級数が，絶対収束であるか，条件収束であるかを判定せよ：

（1） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$　　（2） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$

（3） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\log n}{n}.$　　（4） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\log n}{n^2}.$

（5） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n+1}.$　　（6） $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin^2 \frac{1}{n}.$

§63. べき級数

1. べき級数・収束半径

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots$$

の形の無限級数を**べき級数**という.[†] $x-a=t$ とおけば, $a=0$ の場合になるから, 以下, 簡単のために, $a=0$ と仮定する:

(63.1)
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots.$$

明らかに, べき級数 (63.1) は, $x=0$ で, つねに収束し, 和 a_0 をもつ.

> **定理 63.1**　べき級数 (63.1) が $x=x_0$ で収束すれば, $|x|<|x_0|$ をみたす, すべての x に対して絶対収束する.
>
> 逆に, べき級数 (63.1) が $x=x_0$ で発散すれば, $|x|>|x_0|$ をみたす, すべての x に対して発散する.

証明　$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0{}^n$ が収束すれば, 定理 59.1 (222 ページ) によって,

$$a_n x_0{}^n \to 0 \qquad (n\to\infty).$$

ゆえに, 十分大きい自然数 n_0 をえらべば,

$$|a_n x_0{}^n| < 1 \qquad (n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

(63.2)
$$\therefore \quad |a_n x^n| = \left|a_n x_0{}^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| = |a_n x_0{}^n|\cdot\left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leqq \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$
$$(|x|<|x_0|;\ n=n_0,\ n_0+1,\ \cdots).$$

$|x|<|x_0|$ のとき, $\left|\frac{x}{x_0}\right|<1$ であるから, 公式 (59.9) (223 ページ) によって, 等比級数: $\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ は収束する. したがって, 不等式 (63.2) と比較判定法 (224 ページ) によって, $\sum_{n=n_0}^{\infty}|a_n x^n|$ は収束する. 有限級数 $\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n x^n|$ を加えても, 収束することにはかわりはないから, $|x|<|x_0|$ のとき, $\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$ は収束する.

定理の後半は, 前半の対偶である.　(証明終)

---

† §18 (61 ページ) 参照.

（i） べき級数(63.1)が $x=0$ でだけ収束するとき，$R=0$ とおく．

（ii） べき級数(63.1)がすべての実数に対して収束するとき，$R=\infty$ とおく．

（iii） （i），（ii）以外の場合，定理 63.1 によって，べき級数(63.1)が，$|x|<R$ をみたすすべての x に対して収束し，$|x|>R$ をみたすすべての x に対して発散する R $(0<R<\infty)$ が存在する．

R をべき級数(63.1)の**収束半径**，区間 $(-R, R)$ を**収束区間**という．

例 1. §59 の 2 項 (222 ページ) によって，$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1.（例 1 終）

例 2. §62 の例 2 (230 ページ) によって，$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の収束半径は ∞.（例 2 終）

2. コーシー・アダマールの定理

> **定理 63.2** べき級数(63.1)において，極限値:
>
> (63.3) $$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$
>
> が存在すれば，この R はべき級数(63.1)の収束半径をあたえる．
>
> **（コーシー・アダマールの定理）**

証明 つぎの 3 つの場合にわけて証明する:

（i） $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty$; （ii） $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0$; （iii） $0<\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<\infty$.

（i）の場合:

任意の $x\neq 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty.$$

したがって，コーシーのべき根判定法 (225 ページ) によって，級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n| \qquad (x\neq 0)$$

は発散する．$x\neq 0$ は任意であったから，定理 63.1 によって，$R=0$.

（ii）の場合:

任意の x に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0.$$

したがって，コーシーのべき根判定法によって，級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n|$$

は収束する．x は任意であったから，$R=\infty$.

(iii) の場合:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1$$

ならば，コーシーのべき根判定法 (225 ページ) によって，級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_nx^n| \tag{63.4}$$

は収束する．すなわち，条件:

$$|x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

をみたす任意の x に対して，級数 (63.4) は収束する．したがって，

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\leqq R. \tag{63.5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$$

ならば，コーシーのべき根判定法によって，級数 (63.4) は発散する．すなわち，条件:

$$|x|>\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

をみたす任意の x に対して，級数 (63.4) は発散する．したがって，

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}\geqq R. \tag{63.6}$$

(63.5)式と (63.6)式によって，(63.3)式がえられる． (証明終)

3. ダランベルの定理

定理 63.3 べき級数 (63.1) において，極限値:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \tag{63.7}$$

が存在すれば，この R はべき級数 (63.1) の収束半径をあたえる．

(ダランベルの定理)

証明 つぎの 3 つの場合にわけて証明する:

(i) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=0$; (ii) $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\infty$; (iii) $0<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|<\infty$.

（i）の場合:

任意の $x \neq 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\infty.$$

したがって，ダランベルの比判定法（226ページ）によって，級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| \qquad (x \neq 0)$$

は発散する．$x \neq 0$ は任意であったから，定理 63.1 によって，$R=0$.

（ii）の場合:

任意の $x \neq 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=0.$$

したがって，ダランベルの比判定法によって，級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| \qquad (x \neq 0)$$

は収束する．$x \neq 0$ は任意であったから，$R=\infty$.

（iii）の場合:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$$

ならば，ダランベルの比判定法によって，級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n| \tag{63.8}$$

は収束する．すなわち，条件:

$$|x|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

をみたす任意の $x \neq 0$ に対して，級数 (63.8) は収束する．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \leqq R. \tag{63.9}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|}=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1$$

ならば，ダランベルの比判定法によって，級数 (63.8) は発散する．すなわち，条件:

$$|x|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

をみたす任意の x に対して，級数 (63.8) は発散する．したがって，

(63．10)
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\geqq R.$$

(63.9)式と(63.10)式によって，(63.7)式がえられる．　(証明終)

例 3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{1}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

ゆえに，このべき級数は $|x|<\infty$ で収束する．　(例 3 終)

例 4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n!x^n$.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

ゆえに，このべき級数は $x=0$ でだけ収束する．　(例 4 終)

問 1. コーシー・アダマールの定理を利用して，つぎのべき級数の収束半径を求めよ:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$.　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2^n+n)x^n$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n^2}}$.　(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n x^{3n}$.

問 2. ダランベルの定理を利用して，つぎのべき級数の収束半径を求めよ:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$.　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}x^n$.

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$.　(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n(n+1)}}$.

(5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-2^{n+1})x^n$.　(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}x^{2n+1}$.

§ 64． べき級数の微分と積分

1． べき級数の微分

定理 64.1 べき級数:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

の収束半径を R $(0<R\leqq\infty)$ とするとき，

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n x^{n-1}\qquad(|x|<R).$$

(べき級数の微分の公式)

証明　　$f(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad g(x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$

とおく.

まず, $f(x)$ の収束半径が R であれば, $g(x)$ の収束半径も R である. これの, 一般な場合の証明は省略するが, 極限値:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

が存在する場合には, ダランベルの定理 (233 ページ) によって, この極限値が $f(x)$ の収束半径 R に等しい. そのとき,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{na_n}{(n+1)a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=R$$

であるから, $g(x)$ の収束半径も R に等しい.

$|x|<R$ である任意の x に対して, $|x|<r<R$ であるように r をとり, さらに, $|h|$ を十分小さくとれば, $|x+h|<r$. そのとき,

(64. 1)
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)=\frac{1}{h}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+h)^n-\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right\}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left\{\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right\}$$

ここで, 平均値の定理 (46 ページ) によって,

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=n\xi_1{}^{n-1}\qquad(x\lesseqgtr\xi_1\lesseqgtr x+h)$$

をみたす ξ_1 が存在する. ふたたび, 平均値の定理によって,

$$\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}=n\xi_1{}^{n-1}-nx^{n-1}=n(\xi_1{}^{n-1}-x^{n-1})$$
$$=n(n-1)\xi_2{}^{n-2}(\xi_1-x)\qquad(x\lesseqgtr\xi_2\lesseqgtr\xi_1)$$

をみたす ξ_2 が存在する.

(64. 2)　　$\therefore\quad\left|\frac{(x+h)^n-x^n}{h}-nx^{n-1}\right|=n(n-1)|\xi_2{}^{n-2}(\xi_1-x)|$
$$\leqq n(n-1)r^{n-2}|h|.$$

(64.1)式と(64.2)式によって,

(64. 3)　　$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\leqq|h|\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)|a_n|r^{n-2}.$

べき級数:

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

の各項は，級数 $g(x)$ の対応する項の微分になっているから，この級数の収束半径も R である．ゆえに，$r<R$ に注意すれば，不等式(64.3)の右辺の級数は収束する．したがって，(64.3)式から，

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|=\left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|=0.$$

$$\therefore\qquad f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=g(x).$$

（証明終）

例． $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots\qquad(|x|<1).$

ゆえに，べき級数の微分の公式によって，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\qquad(|x|<1).$$

したがって，

(64.4)
$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}+\cdots\qquad(|x|<1).$$

（例終）

2．べき級数の積分

定理 64.2　べき級数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

の収束半径を R $(0<R\leqq\infty)$ とするとき，

$$\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\qquad(|x|<R).$$

（べき級数の積分の公式）

証明　$f(x)\equiv\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\qquad F(x)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

とおく．

定理64.1の証明で，$f(x)$ を $F(x)$，$g(x)$ を $f(x)$ と考えれば，級数 $F(x)$ の収束半径も R であることが示されて，定理64.1によって，

$$F'(x)=f(x)\qquad(|x|<R)$$

である；すなわち，$F(x)$ は $f(x)$ の原始関数である．さらに，定理64.1によって，$f(x)$ は $|x|<R$ で微分可能であるから，そこで連続である．そのとき，定理40.2（140ページ）によって，

$$\int_0^x f(t)\,dt=\Big[F(t)\Big]_0^x=F(x)-F(0)=F(x).$$ （証明終）

3．$\tan^{-1}x$ のテイラー展開　公式(19.8)(65ページ)において，$\alpha=-1$ とおけば，

$$\binom{-1}{n}=\frac{(-1)(-2)\cdots(-n)}{n!}=(-1)^n \qquad (n=1, 2, \cdots)$$

であるから，

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (|x|<1).$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots \qquad (|x|<1).$$

そのとき，べき級数の積分の公式によって，

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt&=\Big[\tan^{-1}t\Big]_0^x\\&=\tan^{-1}x-\tan^{-1}0=\tan^{-1}x\\&=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots \qquad (|x|<1).\end{aligned}$$

この展開は $|x|\leqq 1$ でなりたつことが示される．したがって，

(64．5)
$$\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (|x|\leqq 1).$$

この公式で，$x=1$ とおけば，

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$ **（グレゴリ級数）**

4．$\sin^{-1}x$ のテイラー展開　公式(19.9)(66ページ)によって，

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \qquad (|x|<1).$$

この公式で，x をあらためて $-x^2$ とおけば，

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}(-x^2)^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n} \qquad (|x|<1).\end{aligned}$$

そのとき，べき級数の積分の公式によって，

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \Bigl[\sin^{-1} t\Bigr]_0^x$$
$$= \sin^{-1} x - \sin^{-1} 0 = \sin^{-1} x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n+1} \qquad (|x|<1).$$

この展開は $|x| \leqq 1$ でなりたつことが示される．したがって，

$$\text{(64.6)} \qquad \sin^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n+1} \qquad (|x| \leqq 1).$$

この公式で，$x=1$ とおけば，

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

問 1. べき級数の微分の公式を利用して，つぎのべき級数展開から，それにつづく関数のべき級数展開を求めよ：

（1）$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (|x|<1), \qquad \dfrac{1}{(1+x)^2}.$

（2）$\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots \quad (|x|<1), \qquad \dfrac{1}{(1-x)^3}.$

（3）$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \quad (|x|<1), \qquad \dfrac{1}{(1+x^2)^2}.$

問 2. べき級数の積分の公式を利用して，つぎのべき級数展開から，それにつづく関数のべき級数展開を求めよ：

（1）$\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \quad (|x|<1), \qquad \log(1+x).$

（2）$\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots \quad (|x|<1), \qquad \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}.$

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)} x^{2n} \quad (|x|<1),$

$\log(x+\sqrt{1+x^2}).$

問題の答

第1章　微分法

§1．極限値 (p. 4)

問 1.　（1）　$-\frac{1}{2}$.　　（2）　$-\frac{2}{3}$.　　（3）　∞.　　（4）　$\frac{1}{4}$.　　（5）　1.

（6）　$\frac{2}{5}$.　　（7）　$\frac{5}{24}$.　　（8）　∞.　　（9）　∞.

(10)　[ヒント：$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ を用いよ.]　$\frac{1}{2}$.

問 2.　（1）　$x=0, \pi, \cdots, n\pi, \cdots$ のとき，$\sin x=0$,

$x=\frac{\pi}{2}, 2\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots, 2n\pi+\frac{\pi}{2}, \cdots$ のとき，$\sin x=1$.

ゆえに，$\lim_{x\to\infty}\sin x$ は存在しない.

（2）　$x=\frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi}, \cdots, \frac{1}{n\pi}, \cdots$ のとき，$\sin\frac{1}{x}=0$,

$x=\frac{1}{\pi/2}, \frac{1}{2\pi+\pi/2}, \cdots, \frac{1}{2n\pi+\pi/2}, \cdots$ のとき，$\sin\frac{1}{x}=1$.

ゆえに，$\lim_{x\to+0}\sin\frac{1}{x}$ は存在しない.

（3）　$0\leqq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq|x|\to 0\quad(x\to 0)$.　　$\therefore\ \lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

§2．連続関数 (p. 6 ~ p. 7)

問 1.　(グラフは省略する.)　（1）　連続.

（2）　連続でない.　（3）　連続でない.

（4）　連続.　（5）　連続でない.

（6）　連続でない.

問 2.　[ヒント：$f(x)=x^2-x+1\quad(x\neq-1)$.]

（1）　$x\neq-1$.　（2）　$x\neq-1$ で連続.

問 3.　（1）　図 1.

（2）　$f(x)=[x]$ は $x=n$ ($n=0, \pm1, \pm2, \cdots$) で連続でない．これらの点以外では連続である.

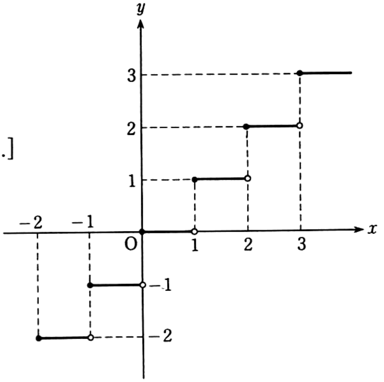


図 1

§3. 導関数 (p. 10)

問 1. （1） $(x^3)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=3x^2.$　　$y+2b=3a^2x.$

（2） $\left(\frac{1}{x}\right)'=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)\Big/h=-\frac{1}{x^2}$ $(x\neq 0).$　　$y-2b=-\frac{x}{a^2}$ $(a\neq 0).$

（3） $(\sqrt{x})'=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0).$　　$y-\frac{b}{2}=\frac{x}{2\sqrt{a}}$ $(a>0).$

問 2. （1） 連続．微分可能．　（2） 連続．微分可能でない．

問 3. $0=f'_-(-1)\neq f'_+(-1)=-2.$　$\therefore$ $x=-1$ で微分可能でない．
$f'_-(1)=f'_+(1)=2.$　$\therefore$ $x=1$ で微分可能．

§4. 微分法の公式 (p. 15)

問 1. （1） $9x^2+4x+3.$　（2） $10x(x+1)(2x-3)^2.$

（3） $3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right).$　（4） $-\frac{1}{(x+2)^2}.$　（5） $-\frac{6x}{(x^2+1)^4}.$

（6） $-\frac{2}{(x-1)^2}.$　（7） $\frac{-3x^2+2x+6}{(x^2+2)^2}.$　（8） $\frac{3x^2}{(1+x)^4}.$

（9） $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$　(10) $\frac{2x+a+b}{2\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$　(11) $\frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}.$

(12) 1.　(13) $\frac{x-1}{2\sqrt{x^3}}.$　(14) $\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1-x)^3}}.$　(15) $\frac{a^2}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}.$

問 2. （1） $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $(x\neq 0).$　（2） $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$

問 3. $\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right).$

問 4. $\frac{dx}{dt}=v_0\cos\alpha,\ \frac{dy}{dt}=v_0\sin\alpha-gt,$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_0\sin\alpha-gt}{v_0\cos\alpha}=\tan\alpha-\frac{gt}{v_0\cos\alpha}.$$

$\frac{dx}{dt}$ は x 方向の速度成分，$\frac{dy}{dt}$ は y 方向の速度成分，$\frac{dy}{dx}$ は軌道の勾配を表す．

第2章　初等関数の微分

§5. べきの微分 (p. 17)

問. （1） $4x^3-24x^2+6x.$　（2） $5(x^2+x+1)^4(2x+1).$

（3） [ヒント：$u=ax+b$, $y=u^n$ とおいて，合成関数の微分の公式を利用.]
$na(ax+b)^{n-1}.$

（4） $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$　（5） $-\frac{3}{4\sqrt[4]{x^7}}.$　（6） $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}.$

（7） $-\frac{2}{3\{\sqrt[3]{x}(1+\sqrt[3]{x})\}^2}.$

§ 6. 3 角関数の微分 (p. 22 ～ p. 23)

問 1. (1) 2.　(2) $\frac{5}{3}$.　(3) $\frac{1}{2}$.

問 2. (1) $2\cos(2x+1)$.　(2) $-2\sin 2x$.　(3) $2\sin 4x$.

(4) $\cos^2 x - x\sin 2x$.　(5) $\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{2}x$.　(6) $2\sec^2(2x+1)$.

(7) $\sec x\tan x$.　(8) $2\sin 2x$.　(9) $\frac{(1-x)\cos x+\sin x}{(1-x)^2}$.

(10) $2x\sec^2(x^2+1)$.　(11) $\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}$.　(12) $\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$.

(13) $\sec^4 x$.　(14) $\frac{\cos x}{2\sqrt{1+\sin x}}$.　(15) $\frac{\cos x}{\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}$.

問 3. (1) $-\cot t$.　(2) $\cot\frac{t}{2}$.

§ 7. 指数関数と対数関数の微分 (p. 27 ～ p. 28)

問 1. (1) e^a.　(2) 1.

問 2. (1) $2e^{2x+1}$.　(2) $-2xe^{-x^2}$.　(3) $\frac{2}{2x-5}$.

(4) $\frac{2x}{x^2+1}$.　(5) $e^{-2x}(1-2x)$.　(6) $x(2\log x+1)$.

(7) $\log(x^2+1)+\frac{2x^2}{x^2+1}$.　(8) $e^{-x}\left(\frac{1}{x}-\log x\right)$.

(9) $e^x(\sin x+\cos x)$.　(10) $e^x(\cot x-\mathrm{cosec}^2 x)$.

(11) $\left(1-\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$.　(12) $2(e^{2x}-e^{-2x})$.　(13) $\frac{1}{x\log x}$.

(14) $-\tan x$.　(15) $-\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$.　(16) $\frac{a}{a^2-x^2}$.　(17) $e^{\sin x}\cos x$.

問 3. $y'=Ake^{kx}=ky$.

問 4. $y'=Ake^{kx}$.

直線 PT: $y-b=kAe^{ka}(x-x)$.
$b=Ae^{ka}$ に注意すれば, $y=0$ とおくことによって, $\mathrm{TQ}=a-x=\frac{1}{k}$ = 一定 (図 2).

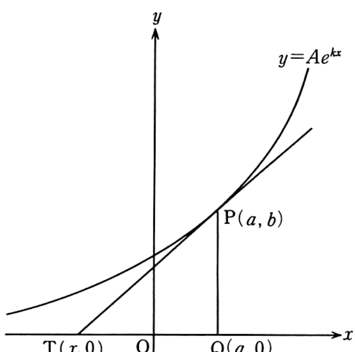


図 2

§ 8. 対数微分法 (p. 30)

問 1. (1) $2^x \log 2 + 3^x \log 3$. (2) $a^x(2x + x^2 \log a)$.

(3) $-2^{-x} \log 2$. (4) $-\dfrac{1}{x^2} 2^{\frac{1}{x}} \log 2$. (5) $\dfrac{1}{x} 2^{\log x} \log 2$.

(6) $x^{\frac{1}{x}-2}(1 - \log x)$. (7) $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \log x\right)$.

(8) $(\sin x)^{\tan x}(\sec^2 x \cdot \log \sin x + 1)$.

(9) $(1+x)^{\frac{1}{x}} \dfrac{1}{x}\left\{\dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{x} \log(1+x)\right\}$.

(10) $\dfrac{3(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-4)}\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)}}$.

問 2. [ヒント: 対数微分法によればよい.]

§ 9. 双曲線関数の微分 (p. 32)

問 1. (1) [ヒント: 公式 (7.9) を利用せよ.] 1.

(2) [ヒント: (1) の結果と公式 (6.16) を利用せよ.] 1.

問 2. (1) $-\tanh x \operatorname{sech} x$. (2) $-\coth x \operatorname{cosech} x$.

(3) $-\operatorname{cosech}^2 x$.

問 3. [ヒント: 公式 (9.11) を利用せよ.]

問 4. (1) [ヒント: 公式 (9.11) を利用せよ.]

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{a} \coth t$.

§ 10. 逆 3 角関数の微分 (p. 36)

問 1. (1) [ヒント: $\theta = \sin^{-1} x$ とおけ.] 1.

(2) [ヒント: $\theta = \tan^{-1} \dfrac{1}{x}$ とおけ.] 1.

問 2. (1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. (2) $-\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. (3) $\dfrac{a}{a^2+x^2}$.

(4) $-\dfrac{1}{1+x^2}$. (5) $\tan^{-1} x + \dfrac{x}{1+x^2}$. (6) $\sin^{-1} x$.

(7) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}} - \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$. (8) $\dfrac{2\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$. (9) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

(10) $\dfrac{\sqrt{3}}{2(x^2+x+1)}$. (11) $\dfrac{1}{1+x^2}$. (12) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (13) $\sqrt{a^2-x^2}$.

(14) $\dfrac{m \sin x}{\sqrt{1-m^2\cos^2 x}}$. (15) $\dfrac{1}{1+x^2} e^{\tan^{-1} x}$. (16) 0.

第 3 章 高階導関数

§ 11. 高階導関数 (p. 40 ~ p. 41)

問 1. (1) $y' = 12x^2 - 12x + 2$, $y'' = 24x - 12$.

(2) $y' = (x^2-1)(5x^2+4x-1)$, $y'' = 4(x+1)(5x^2-2x-1)$.

(3) $y'=-\dfrac{2}{x^3},\quad y''=\dfrac{6}{x^4}.$

(4) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}},\quad y''=-\dfrac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}.$

(5) $y'=-\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad y''=-\dfrac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$

(6) $y'=-\dfrac{1}{2\sqrt{(1+x)^3}},\quad y''=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{(1+x)^5}}.$

(7) $y'=\dfrac{2}{n}(2x+1)^{-\frac{n-1}{n}},\quad y''=-\dfrac{4(n-1)}{n^2}(2x+1)^{-\frac{2n-1}{n}}.$

(8) $y'=-3e^{-3x},\quad y''=9e^{-3x}.$

(9) $y'=2\cos 2x,\quad y''=-4\sin 2x.$

(10) [ヒント: $\sec^2 x=1+\tan^2 x$.] $y'=\sec^2 x,\quad y''=2\tan x\sec^2 x.$

(11) $y'=\dfrac{2}{2x-1},\quad y''=-\dfrac{4}{(2x-1)^2}.$

問 2. (1) $y'=4x^3-6x^2+5,\quad y''=12x^2-12x,\quad y'''=24x-12.$

(2) $y'=6x^{-4},\quad y''=-24x^{-5},\quad y'''=120x^{-6}.$

(3) $y'=\sec x\tan x,\quad y''=2\sec^3 x-\sec x,\quad y'''=\sec x\tan x\,(6\sec^2 x-1).$

(4) $y'=\dfrac{1}{1+x^2},\quad y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2},\quad y'''=\dfrac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}.$

(5) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad y''=\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}},\quad y'''=\dfrac{1+2x^2}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$

問 3. (1) $y'=6x^2-18x+12,\quad y''=12x-18,\quad y'''=12,\quad y^{(n)}=0\quad (n\geqq 4).$

(2) $y^{(n)}=\begin{cases} m(m-1)\cdots(m-n+1)2^n(2x+1)^{m-n} & (m\geqq n),\\ 0 \quad (m<n). \end{cases}$

(3) $r(r-1)\cdots(r-n+1)3^n(3x+2)^{r-n}.$

(4) $(-1)^n n!\dfrac{1}{(x+a)^{n+1}}.$

(5) $\left[\text{ヒント: } \dfrac{1}{(x+2)(x-1)}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+2}\right).\right]$

$\dfrac{(-1)^n n!}{3}\left\{\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right\}.$

(6) $(-1)^n 3^n e^{-(3x+1)}.$

(7) $2^n\cos\left(2x+3+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

(8) $\left[\text{ヒント: } \sin 3x\cos 2x=\dfrac{1}{2}(\sin 5x+\sin x).\right]$

$\dfrac{1}{2}\left\{5^n\sin\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}.$

(9) $a^x(\log a)^n.$

(10) $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!2^n}{(2x+1)^n}.$

問 6. $\left[\text{ヒント: } \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}\right.$ を x について微分せよ.$\left.\right]$

問 7. $\left[\text{ヒント: } u=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \text{ とおいて, } \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} \text{ に注意.}\right]$

問 8. $\left[\text{ヒント: } \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}},\quad \dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)\dfrac{dt}{dx} \text{ を利用せよ.}\right]$

問 9. (1) $-\dfrac{b}{a^2}\operatorname{cosec}^3 t.$ (2) $\dfrac{1}{at}\sec^3 t.$

§ **12.** **ライプニッツの公式** (p. 43)

問 1. (1) $-4e^x(\sin x+\cos x).$ (2) $-4e^{-x}\cos x.$

(3) $e^x(x^2+12x+30).$ (4) $x\sin x-7\cos x.$

問 2. (1) $e^x\{x^2+2nx+n(n-1)\}.$

(2) $x\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-n\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

(3) $\{x^2-n(n-1)\}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-2nx\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right).$

第4章 平均値の定理

§ **13.** **ロールの定理** (p. 46)

問 1. [ヒント: $F(x)\equiv f(x)-f(a)$ にロールの定理を用いよ.]

問 2. (1) $\dfrac{a+b}{2}.$ (2) $\dfrac{2a+b}{3}.$ (3) $\dfrac{a+2b}{3}.$

§ **14.** **平均値の定理** (p. 49)

問 1. (1) $c=\dfrac{a+b}{2},\quad \theta=\dfrac{1}{2}.$

(2) $c=\sqrt{ab},\quad \theta=\dfrac{\sqrt{a(a+h)}-a}{h}=\dfrac{a}{\sqrt{a(a+h)}+a}.$

(3) $c=\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2,\quad \theta=\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{a(a+h)}-a}{2h}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{a}{2(\sqrt{a(a+h)}+a)}.$

問 2. [ヒント: $F(x)\equiv f(x)-g(x)$ に定理 14.2 を適用せよ.]

問 4. [ヒント: 両辺の微分が等しいことを示し, 問 2 を利用せよ.]

§ **15.** **不定形の極限値** (p. 52 ~ p. 53)

問. (1) $\dfrac{1}{2}.$ (2) $\dfrac{1}{2}.$ (3) 2. (4) 1. (5) 0.

(6) 1. (7) 1. (8) $\dfrac{1}{3}.$ (9) $-\dfrac{1}{6}.$ (10) $\dfrac{2}{3}.$

(11) 0. (12) 0. (13) $-\dfrac{1}{2}.$ (14) 1. (15) 1.

第5章 テイラーの定理

§16. テイラーの定理（p. 56）

問 1. $\theta=\dfrac{1}{3}$.

問 2. $\left[\text{ヒント：}\left|\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n\right|\leqq\dfrac{M}{n!}R^n\ \text{に注意せよ.}\right]$

§17. 初等関数への応用（p. 60 ～ p. 61）

問 1. [ヒント：マクローリンの定理の応用.（4）は例2を参考にせよ.]

問 2. [ヒント：（1）は，問1の（4）を利用せよ.]

問 3. （1） $\sqrt{e}\fallingdotseq 1.649$.

（2） [ヒント：問1の（4）を利用せよ.] $\sqrt{1.1}\fallingdotseq 1.049$.

§19. 初等関数のテイラー展開（p. 66）

問 1. （1） $\left[\text{ヒント：}\dfrac{1}{1-t}\ \text{のマクローリン展開で，}t=-x^2\ \text{とおけばよい.}\right]$

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\quad(|x|<1).$$

（2） $\left[\text{ヒント：}\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\ \text{のマクローリン展開で，}t=-x^2\ \text{とおけばよい.}\right]$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{2^n n!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}n!^2}x^{2n}\quad(|x|<1).$$

（3） $$e^{-(2x+1)}=\frac{e^{-2x}}{e}=\frac{1}{e}\left(1-2x+\frac{2^2}{2!}x^2-\frac{2^3}{3!}x^3+\cdots\right)=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n!}x^n$$
$(|x|<\infty)$.

（4） $a^x=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\log a)^n}{n!}x^n\quad(|x|<\infty)$. （5） $\cosh x=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}\quad(|x|<\infty)$.

（6） [ヒント：$\sin(2x+3)=\sin 2x\cos 3+\cos 2x\sin 3$ を利用せよ.]

$$\sin(2x+3)=\cos 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\sin 3\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k}}{(2k)!}x^{2k}\quad(|x|<\infty).$$

（7） [ヒント：$\log(1-x-2x^2)=\log(1+x)(1-2x)=\log(1+x)+\log(1-2x)$ を利用.]

$$\log(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}-2^n}{n}x^n\quad\left(|x|<\frac{1}{2}\right)$$

問 2. （1） $\tan x=x+\dfrac{x^3}{3}+\cdots$. （2） $\sec x=1+\dfrac{x^2}{2}+\cdots$.

（3） $e^x\sin x=x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+\cdots$. （4） $\log(1+\sin x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}+\cdots$.

（5） $e^{\frac{1}{1-x}}=e\left(1+x+\dfrac{3}{2}x^2+\dfrac{13}{6}x^3+\cdots\right)$.

問 3. （1） $\dfrac{1}{2}$. （2） $\dfrac{1}{6}$. （3） $\dfrac{1}{2}$. （4） $-\dfrac{1}{8}$. （5） $\dfrac{1}{3}$.

§ 20. 関数の増減と極値 (p. 74)

問 1. (1) [ヒント: $y'>0$ を示せばよい.]

(2) [ヒント: $x>0$ のとき, $y'>0$ であることを示せばよい.]

問 2. [ヒント: 定理 20.1 を利用せよ.]

問 3. (1) 図 3. (2) 図 4. (3) 図 5.

(4) 図 6. (5) 図 7. (6) 図 8. (7) 図 9.

(8) 図 10. (9) 図 11. (10) 図 12. (11) 図 13.

(12) 図 14. (13) 図 15. (14) 図 16.

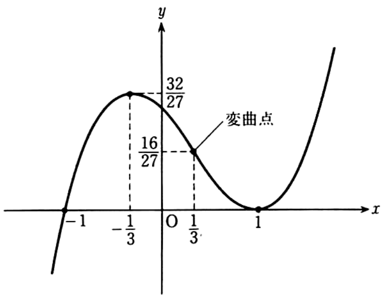


図 3

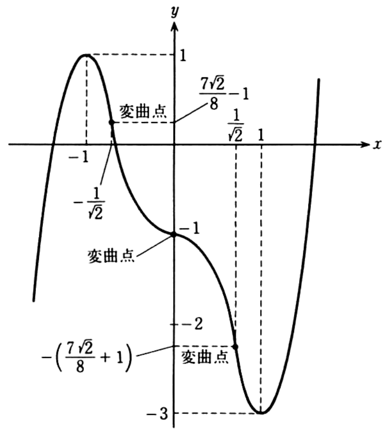


図 5

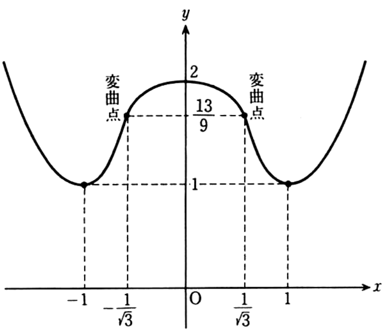


図 4

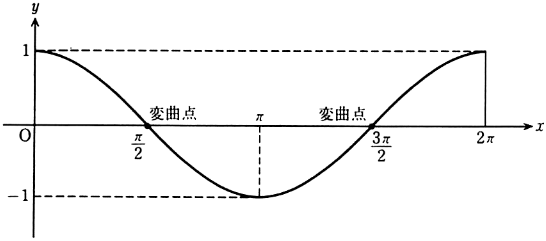


図 6

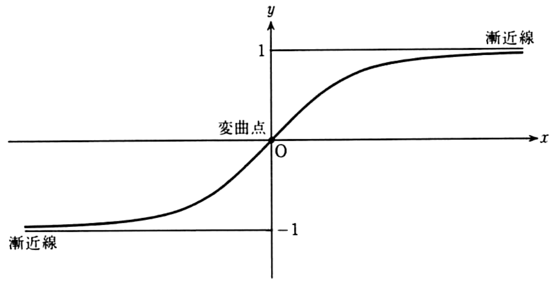


図 7

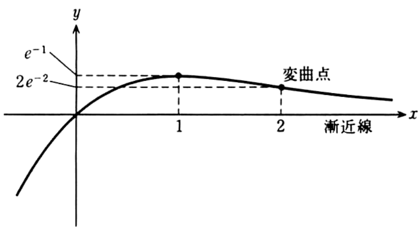


図 8

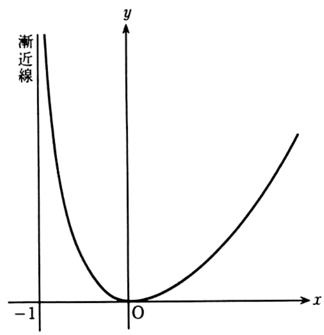


図 9

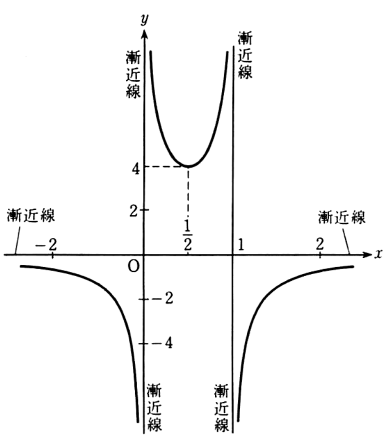


図 10

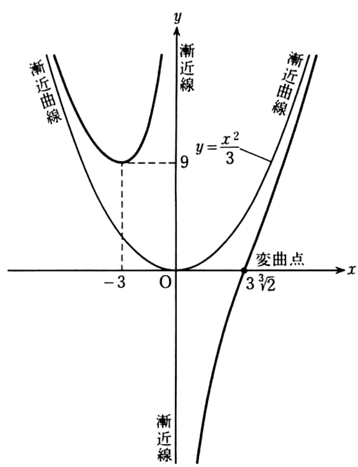


図 11

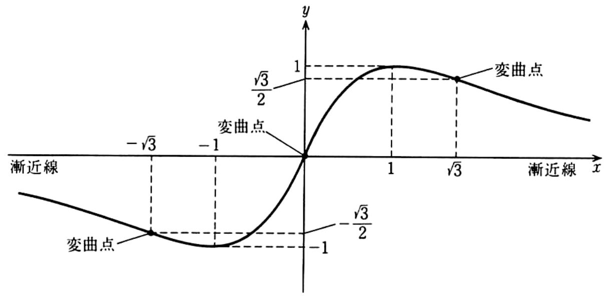


図 12

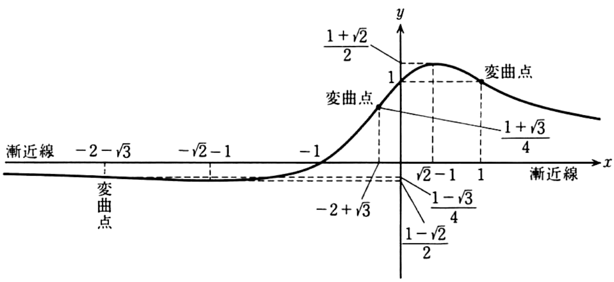


図 13

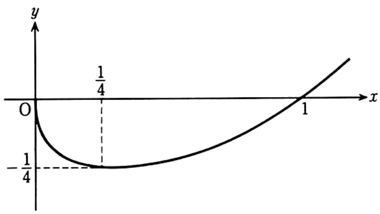


図 14

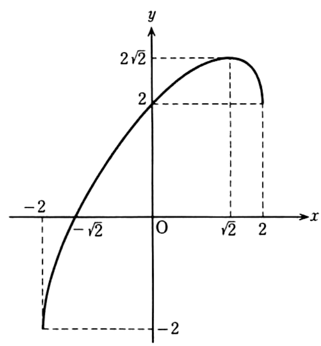


図 15

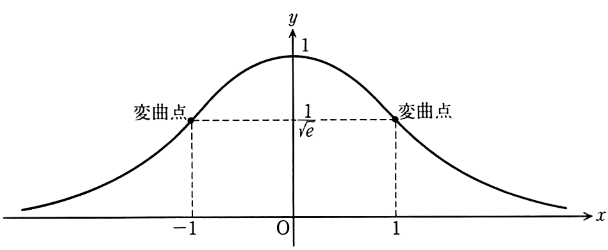


図 16

問 4. (1)　最大値：$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$,　最小値：$f(0)=f(\pi)=0$.

(2)　最大値：$f(0)=f(2\pi)=3$,　最小値：$f\left(\frac{2\pi}{3}\right)=f\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{3}{2}$.

(3)　最大値：$f(2\pi)=2\pi+2$,　最小値：$f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{5\pi}{6}-\sqrt{3}$.

(4)　最大値：$f\left(\frac{7\pi}{6}\right)=f\left(\frac{11\pi}{6}\right)=\frac{3}{2}$,　最小値：$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-3$.

(5)　最大値：$f(5)=\frac{14}{3}$,　最小値：$f(1)=2$.

問 5. (1)　図 17.　　(2)　図 18.

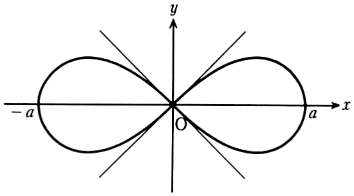


図 17

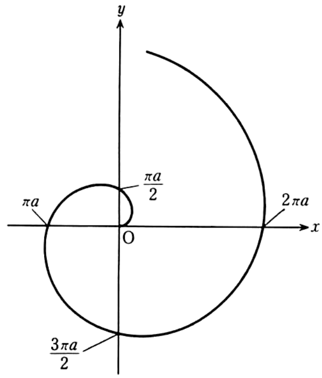


図 18

第6章　偏微分法

§ 21.　極限値と連続関数 (p. 78)

問 1. (1)　(i)　−1,　1.　　(ii)　$\frac{1-m}{1+m}$.　　(iii) は (ii) から明らか.

(2)　(i)　0,　1.　　(ii)　$\frac{1}{1-m}$.　　(iii) は (ii) から明らか.

(3)　(i)　0,　0.　　(ii)　$\frac{m}{1+m^2}$.　　(iii) は (ii) から明らか.

(4)　(i)　−1,　1.　　(ii)　$\frac{1-m^2}{1+m^2}$.　　(iii) は (ii) から明らか.

問 2. (1)　0.　　(2)　0.

§ 22.　偏導関数 (p. 79)

問. (1)　$z_x=1$,　$z_y=1$.　　(2)　$z_x=2x$,　$z_y=2y$.

(3)　$z_x=2(x+y)$,　$z_y=2(x+3y)$.

(4)　$z_x=3(x^2-y)$,　$z_y=3(-x+y^2)$.

(5)　$z_x=e^{x+y}$,　$z_y=e^{x+y}$.　　(6)　$z_x=ye^{xy}$,　$z_y=xe^{xy}$.

(7)　$z_x=-\sin(x+y)$,　$z_y=-\sin(x+y)$.

(8)　$z_x=y\cos xy$,　$z_y=x\cos xy$.　　(9)　$z_x=\cos y$,　$z_y=-x\sin y$.

(10) $z_x = e^x \sin y$, $z_y = e^x \cos y$.

(11) $z_x = \cos x \cos y$, $z_y = -\sin x \sin y$.

(12) $z_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $z_y = \dfrac{-y}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

(13) $z_x = -\dfrac{y}{(x+y)^2}$, $z_y = \dfrac{x}{(x+y)^2}$.

(14) $z_x = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $z_y = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

§ 23. 全微分可能性 (p. 83)

問 1. (1) $dz = dx + dy$. (2) $dz = 2x\,dx + 2y\,dy$.

(3) $dz = 2(x+y)\,dx + 2(x+3y)\,dy$.

(4) $dz = 3(x^2-y)\,dx + 3(-x+y^2)\,dy$.

(5) $dz = e^{x+y}(dx+dy)$. (6) $dz = e^{xy}(y\,dx + x\,dy)$.

(7) $dz = -\sin(x+y)\cdot(dx+dy)$. (8) $dz = \cos(xy)\cdot(y\,dx + x\,dy)$.

(9) $dz = \cos y\,dx - x \sin y\,dy$. (10) $dz = e^x(\sin y\,dx + \cos y\,dy)$.

(11) $dz = \cos x \cos y\,dx - \sin x \sin y\,dy$.

(12) $dz = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}(x\,dx - y\,dy)$.

(13) $dz = \dfrac{1}{(x+y)^2}(-y\,dx + x\,dy)$.

(14) $dz = \dfrac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$.

問 2. (1) $z-c = 2(x-a)+3(y-b)$. $\therefore$ $z = 2x+3y+1$.

(2) $z-c = 2a(x-a)+2b(y-b)$. $\therefore$ $z+c = 2ax+2by$.

(3) $z-c = 3a^2(x-a)+3b^2(y-b)$. $\therefore$ $z+2c = 3a^2x+3b^2y$.

(4) $z-c = b(x-a)+a(y-b)$. $\therefore$ $z+c = bx+ay$.

(5) $z-c = -\dfrac{1}{(a+b)^2}(x-a) - \dfrac{1}{(a+b)^2}(y-b)$.

$$\therefore \quad z-2c = -\frac{x+y}{(a+b)^2}.$$

(6) $z-c = -\dfrac{2a}{(a^2+b^2)^2}(x-a) - \dfrac{2b}{(a^2+b^2)^2}(y-b)$.

$$\therefore \quad z-3c = -\frac{2(ax+by)}{(a^2+b^2)^2}.$$

(7) $z-c = -\dfrac{1}{a^2b}(x-a) - \dfrac{1}{ab^2}(y-b)$.

$$\therefore \quad z-3c = -\frac{bx+ay}{a^2b^2}.$$

(8) $z-c = \dfrac{-a}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}}(x-a) + \dfrac{-b}{\sqrt{r^2-a^2-b^2}}(y-b)$.

$$\therefore \quad ax+by+cz = r^2.$$

§ **24.** **高階偏導関数** (p. 86)

問. (1) $z_{xx}=0,\quad z_{xy}=0,\quad z_{yy}=0.$

(2) $z_{xx}=2,\quad z_{xy}=0,\quad z_{yy}=2.$

(3) $z_{xx}=2,\quad z_{xy}=2,\quad z_{yy}=6.$

(4) $z_{xx}=6x,\quad z_{xy}=-3,\quad z_{yy}=6y.$

(5) $z_{xx}=e^{x+y},\quad z_{xy}=e^{x+y},\quad z_{yy}=e^{x+y}.$

(6) $z_{xx}=y^2e^{xy},\quad z_{xy}=e^{xy}+xye^{xy},\quad z_{yy}=x^2e^{xy}.$

(7) $z_{xx}=-\cos(x+y),\quad z_{xy}=-\cos(x+y),\quad z_{yy}=-\cos(x+y).$

(8) $z_{xx}=-y^2\sin xy,\quad z_{xy}=\cos xy-xy\sin xy,\quad z_{yy}=-x^2\sin xy.$

(9) $z_{xx}=0,\quad z_{xy}=-\sin y,\quad z_{yy}=-x\cos y.$

(10) $z_{xx}=e^x\sin y,\quad z_{xy}=e^x\cos y,\quad z_{yy}=-e^x\sin y.$

(11) $z_{xx}=-\sin x\cos y,\quad z_{xy}=-\cos x\sin y,\quad z_{yy}=-\sin x\cos y.$

(12) $z_{xx}=\dfrac{-y^2}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}},\quad z_{xy}=\dfrac{xy}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}},\quad z_{yy}=\dfrac{-x^2}{\sqrt{(x^2-y^2)^3}}.$

(13) $z_{xx}=\dfrac{2y}{(x+y)^3},\quad z_{xy}=\dfrac{y-x}{(x+y)^3},\quad z_{yy}=-\dfrac{2x}{(x+y)^3}.$

(14) $z_{xx}=\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad z_{xy}=\dfrac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\quad z_{yy}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$

第7章 2変数合成関数の微分

§ **25.** **合成関数の微分** (p. 90)

問 1. (1) $2p(4p-1)t.$ (2) $5\sin 2t.$ (3) $-3\sinh 2t.$

(4) $e^t\cos x\cos y-\dfrac{1}{t}\sin x\sin y=e^t\cos e^t\cdot\cos\log t-\dfrac{1}{t}\sin e^t\cdot\sin\log t.$

(5) $-\sin x\sinh y\cdot 2t+\cos x\cosh y\cdot\dfrac{1}{t}=(1-t^2)\sin t^2+\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)\cos t^2.$

(6) $\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cdot(-a\sin t)+\dfrac{2y}{x^2+y^2}\cdot(b\cos t)=\dfrac{(b^2-a^2)\sin 2t}{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}.$

問 2. (1) $z_u=e^x(\cos y-\sin y),\quad z_v=-e^x(\cos y+\sin y).$

(2) $z_u=2(x+yv)\cos(x^2+y^2),\quad z_v=2(-x+yu)\cos(x^2+y^2).$

(3) $z_u=-2(x+y)\left(\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{1}{v}\sin\dfrac{u}{v}\right),$

$z_v=2(x+y)\left(\dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}+\dfrac{u}{v^2}\sin\dfrac{u}{v}\right).$

(4) $z_u=\dfrac{1}{u^2+v^2}(u\cos x\cosh y-v\sin x\sinh y),$

$z_v=\dfrac{1}{u^2+v^2}(v\cos x\cosh y+u\sin x\sinh y).$

(5) $z_u=\dfrac{2xu+2yv}{x^2+y^2}=\dfrac{2u}{u^2+v^2},\quad z_v=\dfrac{-2xv+2yu}{x^2+y^2}=\dfrac{2v}{u^2+v^2}.$

(6) $z_u=\dfrac{-2yu+2xv}{x^2+y^2}=\dfrac{-2v}{u^2+v^2},\quad z_v=\dfrac{2yv+2xu}{x^2+y^2}=\dfrac{2u}{u^2+v^2}.$

問 3. （1） [ヒント：例1にならえ.] （2） [ヒント：例2にならえ.]

§ 26. 2変数の平均値の定理 (p. 92)

問 1. [ヒント：$F(x, y) \equiv f(x, y) - g(x, y)$ に定理 26.2 を適用せよ.]

問 2. [ヒント：問1を利用せよ.]

§ 27. 陰関数 (p. 96)

問 1. [ヒント：陰関数の微分の公式.] （1） $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+a}{y+b}$.

（2） $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x^2}{y^2-x}$. （3） $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y + y\sin x}{\cos x - xe^y}$. （4） $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$.

問 2. （1） $-(x-a)+2b(y-b)=0$ から, $2by = x+a$.

（2） $\dfrac{2}{9}a(x-a)+\dfrac{2}{4}b(y-b)=0$ から, $\dfrac{ax}{9}+\dfrac{by}{4}=1$.

（3） $\dfrac{2}{9}a(x-a)-\dfrac{2}{4}b(y-b)=0$ から, $\dfrac{ax}{9}-\dfrac{by}{4}=1$.

問 3. [ヒント：例2にならえ.] （1） $y' = \dfrac{2}{y}$, $y'' = -\dfrac{y'^2}{y} = -\dfrac{4}{y^3}$.

（2） $y' = -\dfrac{4x}{9y}$, $y'' = -\dfrac{4}{y}\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{4}y'^2\right) = -\dfrac{4^2}{9y^3}$.

（3） $y' = \dfrac{y-2x}{2y-x}$, $y'' = \dfrac{2(1-y'+y'^2)}{x-2y} = \dfrac{6(x^2-xy+y^2)}{(x-2y)^3}$.

問 4. （1） $x=0$ のとき, 極大値 $y=1$. $x=0$ のとき, 極小値 $y=-1$.

（2） $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極大値 $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. $x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき, 極小値 $y=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

第8章 2変数のテイラーの定理

§ 28. テイラーの定理 (p. 100)

問 1. $0<\theta<1$ をみたす θ が存在して,

（1） $z = x^2+2xy+3y^2$. （2） $z = 3(\theta x^3 - xy + \theta y^3)$.

（3） $z = y + \dfrac{e^{\theta x}}{2}\{(x^2-y^2)\sin\theta y + 2xy\cos\theta y\}$.

（4） $z = x - \dfrac{1}{2}\{(x^2+y^2)\sin\theta x\cos\theta y + 2xy\cos\theta x\sin\theta y\}$.

（5） $z = y - \dfrac{y(x+y)}{\{1+\theta(x+y)\}^3}$. （6） $z = 1 + \dfrac{x^2-y^2}{2\{1+\theta^2(x^2-y^2)\}^{\frac{3}{2}}}$.

（7） $z = x + \dfrac{y^2 - \{\theta(x^2+y^2)+x\}^2}{2\{(1+\theta x)^2+\theta^2y^2\}^2}$. （8） $z = y - \dfrac{y\{x(1+\theta x)+\theta y^2\}}{\{(1+\theta x)^2+\theta^2y^2\}^2}$.

問 2. $z = f(x, y)$, $\Delta z = f(x+h, y+k) - f(x, y)$ とおくとき, $0<\theta<1$ をみたす θ が存在して,

（1） $\Delta z = \pi(yh+xk)+\pi hk$.

（2） $\Delta z = 2(x+y)h+2(x+3y)k+(h^2+2hk+3k^2)$.

（3） $\Delta z = 3(x^2-y)h+3(-x+y^2)k+3\{(x+\theta h)h^2-hk+(y+\theta k)k^2\}$.

（4） $\Delta z = e^x(h\sin y + k\cos y)$
$$+\frac{e^{x+\theta h}}{2}\{(h^2-k^2)\sin(y+\theta k)+2hk\cos(y+\theta k)\}.$$

（5） $\Delta z = (h\cos x\cos y - k\sin x\sin y)$
$$-\frac{1}{2}\{(h^2+k^2)\sin(x+\theta h)\cos(y+\theta k)$$
$$+2hk\cos(x+\theta h)\sin(y+\theta k)\}.$$

（6） $\Delta z = \dfrac{-yh+xk}{(x-y)^2}+\dfrac{[(y+\theta k)h^2-\{(x+y)+\theta(h+k)\}hk+(x+\theta h)k^2]}{\{(x-y)+\theta(h-k)\}^3}.$

§ 29. テイラー展開（p. 102）

問. （1） $e^x\sin y = y + xy + \dfrac{1}{6}(3x^2y - y^3)+\cdots.$

（2） $e^{-x}\cos y = 1 - x + \dfrac{1}{2}(x^2-y^2)-\dfrac{1}{6}(x^3-3xy^2)+\cdots.$

（3） $\sin x\cos y = x - \dfrac{1}{6}(x^3+3xy^2)+\cdots.$

（4） $\cos x\sinh y = y - \dfrac{1}{6}(3x^2y-y^3)+\cdots.$

（5） $\dfrac{1-x}{(1-x)^2+y^2} = 1 + x + (x^2-y^2)+(x^3-3xy^2)+\cdots.$

（6） $\tan^{-1}\dfrac{y}{1+x} = y - xy + \dfrac{1}{3}(3x^2y-y^3)+\cdots.$

§ 30. 2変数関数の極値（p. 105 ～ p. 106）

問 1. （1） $(0,0)$ で極小値 0.　（2） 極値なし.
（3） $(0,0)$ で極小値 0.　（4） 極値なし.　（5） 極値なし.
（6） $(0,0)$ で極大値 0.　（7） $(1,0)$ で極小値 0.
（8） 極値なし.　（9） $(2,1)$ で極大値 6.
（10） $(3,3)$ で極小値 -27.（$(0,0)$ で，$f_x=f_y=0$ となるが，極値をとらない.）
（11） $(0,0)$ で極大値 1.

問 2. [ヒント：直方体の3辺の長さを x, y, z とすれば，$xyz=k$（k は定数）のもとで，$A=2xy+2yz+2zx$ を最小にする問題. A を x, y の関数として表し，それを最小にせよ.] 立方体.

§ 31. 条件つき極値問題（p. 108）

問 1. $(1,1)$ と $(-1,-1)$ で極小値 2.

問 2. （1） $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}, -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right).$

（2） $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right).$

（3） $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right),\quad \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$

（4） $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right),\quad \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right),\quad \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$

第9章 不定積分

§32. 不定積分 (p. 112～p. 113)

問. (1) $\dfrac{x^4}{4}-x^2+C.$ (2) $-\dfrac{1}{2x^2}-\dfrac{1}{x}+C.$ (3) $\dfrac{2}{5}\sqrt{x^5}+C.$

(4) $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+C.$ (5) $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{(1+x)^4}+C.$ (6) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x^3}+2\sqrt{x}+C.$

(7) $\left[\text{ヒント}: \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{1+x}}=\sqrt{1+x}-\sqrt{x}.\right]$ $\dfrac{2}{3}(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{x^3})+C.$

(8) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x+3}+C.$ (9) $\dfrac{1}{2}(e^{2x}-e^{-2x})+2x+C.$

(10) $\dfrac{3^x}{\log 3}+C.$ (11) $\dfrac{2^{2x+1}}{2\log 2}+C.$ (12) $x+4\log|x-4|+C.$

(13) $\sin(x+1)+C.$ (14) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C.$

(15) $\left[\text{ヒント}: \cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}.\right]$ $\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

(16) $\left[\text{ヒント}: \sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}.\right]$ $\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{4}\sin 2x+C.$

(17) $\left[\text{ヒント}: \sin 2x\cos x=\dfrac{1}{2}(\sin 3x+\sin x).\right]$ $-\dfrac{1}{6}(\cos 3x+3\cos x)+C.$

(18) $x-\dfrac{1}{2}\cos 2x+C.$ (19) $2\tan\dfrac{x}{2}+C.$

(20) $[\text{ヒント}: \tan^2 x=\sec^2 x-1.]$ $\tan x-x+C.$

(21) $\left[\text{ヒント}: \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}.\right]$ $\sin^{-1}(x-1)+C.$

(22) $\left[\text{ヒント}: \dfrac{1}{x^2-2x+2}=\dfrac{1}{1+(x-1)^2}.\right]$ $\tan^{-1}(x-1)+C.$

(23) $\dfrac{1}{2}\sinh(2x+1)+C.$

(24) $\left[\text{ヒント}: \dfrac{1}{x^2+4x+3}=\dfrac{1}{(x+2)^2-1}.\right]$ $\dfrac{1}{2}\log\left|\dfrac{x+1}{x+3}\right|+C.$

(25) $\left[\text{ヒント}: \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}}=\dfrac{1}{\sqrt{(x+1)^2+1}}.\right]$ $\log|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}|+C.$

§33. 置換積分法 (p. 115～p. 116)

問 1. (1) $\dfrac{1}{10}(2x-3)^5+C.$ (2) $\dfrac{1}{15}(x^3+1)^5+C.$

(3) $-\dfrac{1}{3(3x+1)}+C.$ (4) $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\dfrac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|+C.$

(5) $\log|x^2-x+1|+C.$

(6) $\left[\text{ヒント}: \dfrac{1}{x^2+x+1}=1\Big/\left\{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}.\right]$ $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

(7) $\frac{1}{2}\tan^{-1}x^2+C.$　(8) $\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}+C.$　(9) $2\sqrt{2x^3-5}+C.$

(10) $\left[ヒント:\ \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}}.\right]$　$\sin^{-1}\frac{x+1}{2}+C.$

(11) $\frac{1}{3}\sin^{-1}x^3+C.$　(12) $\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

(13) [ヒント: $\cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x.$]　$\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C.$

(14) $\log|1+\sin x|+C.$　(15) $\log|1+\tan x|+C.$　(16) $\frac{1}{2}e^{x^2}+C.$

(17) $\frac{1}{3}(e^x+1)^3+C.$　(18) $x-\log(e^x+1)+C.$

(19) $\log\cosh x+C.$　(20) $\frac{1}{2}(\log x)^2+C.$

問 2. (1) [ヒント: §9の1項 (30ページ) であげた双曲線関数の公式 (9.11)～(9.13) を用いよ.]

§34. 部分積分法 (p. 120)

問 1. (1) $\frac{1}{72}(x-1)^8(8x+1)+C.$　(2) $\frac{1}{4}\left(\log|2x+3|-\frac{2x}{2x+3}\right)+C.$

(3) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$　(4) $\frac{1}{9}\sin 3x-\frac{1}{3}x\cos 3x+C.$

(5) $\left[ヒント:\ \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}.\right]$　$\frac{x^2}{4}+\frac{x}{4}\sin 2x+\frac{\cos 2x}{8}+C.$

(6) [ヒント: $\tan^2 x=\sec^2 x-1.$]　$x\tan x+\log|\cos x|-\frac{x^2}{2}+C.$

(7) $(x-1)e^x+C.$　(8) $-(x^2+2x+2)e^{-x}+C.$

(9) $x(\log x-1)+C.$　(10) $\frac{x^2}{4}(2\log x-1)+C.$

(11) $x\tan^{-1}x-\log\sqrt{1+x^2}+C.$　(12) $x\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C.$

(13) $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\sin x)+C.$　(14) $-\frac{1}{13}e^{-2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)+C.$

§35. 有理式の積分 (p. 125)

問 1. (1) $\frac{x^2}{2}+ax+a^2\log|x-a|+C.$　(2) $\frac{x^3}{3}-x+\tan^{-1}x+C.$

問 2. (1) $\frac{1}{4}\log|(x-2)(x+2)^3|+C.$　(2) $\log\frac{(x-2)^2}{|x-1|}+C.$

(3) $x+\frac{1}{2}\log\frac{|(x-1)(x-3)^{27}|}{(x-2)^{16}}+C.$　(4) $\log\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|}+C.$

(5) $\frac{1}{3}\log\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+C.$　(6) $\frac{2x+1}{2(x+1)^2}+\log|x+1|+C.$

(7) $-\frac{1}{x+2}+\log\{|x+2|(x-3)^2\}+C.$　(8) $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)+C.$

(9) $\frac{3}{x+2}+\log\frac{|x+2|}{\sqrt{x^2+2x+2}}+4\tan^{-1}(x+1)+C.$

(10) $\frac{1}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\log\frac{x^2}{1+x^2}+C.$

問 3. (1) $\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{x^2+2x+2}+\tan^{-1}(x+1)\right)+C.$

(2) $\frac{1}{16}\left(\frac{2(x-1)}{x^2-2x+5}+\tan^{-1}\frac{x-1}{2}\right)+C.$

問 4. $\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{3}{2}\frac{x}{1+x^2}+\frac{3}{2}\tan^{-1}x\right\}+C.$

問 5. (35.10)式と同じ.

§ 36. $\sin x$, $\cos x$ **の有理式の積分** (p. 127)

問. (1) $\tan\frac{x}{2}+C.$ (2) $\log\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$

(3) $\log\left|\frac{1+\tan(x/2)}{1-\tan(x/2)}\right|+C=\log\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$

(4) $x+\frac{2}{1+\tan(x/2)}+C.$ (5) $\log\sqrt{\left|\frac{\tan(x/2)+1}{\tan(x/2)-3}\right|}+C.$

(6) $\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(3\tan\frac{x}{2}-2\right)\right\}+C.$

§ 37. 無理式の積分 (p. 130)

問 1. (1) $\frac{2}{15}(3x-2)\sqrt{(1+x)^3}+C.$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{1-x}-\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}+\sqrt{2}}\right|+C.$

問 2. (1) $2\tan^{-1}\sqrt{x}+C.$ (2) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-4\sqrt[4]{x}+4\tan^{-1}\sqrt[4]{x}+C.$

問 3. (1) $\log\left|\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$

(2) $2\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}+C.$

問 4. (1) $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$

(2) [ヒント: $\sqrt{x^2-2x-5}=x-t$ とおけ.] $\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x-5}-x}{\sqrt{5}}\right)+C.$

第10章 定 積 分

§ 38. 定 積 分 (p. 137)

問 1. $b-a.$

問 2. (1) $\frac{1}{2}(b^2-a^2).$ (2) $\frac{1}{3}(b^3-a^3).$

§ 39. 定積分の基本性質 (p. 139)

問. [ヒント: $F(x_1)<F(x_2)$ $(x_1<x_2)$ を証明すればよい.]

§ 40.　定積分と不定積分（p. 141）

問.（1）$\left[ヒント：\int_x^b f(t)\,dt=\int_a^b f(t)\,dt-S(x).\right]$　$-f(x)$.

（2）$\left[ヒント：\int_x^{x+1} f(t)\,dt=S(x+1)-S(x).\right]$　$f(x+1)-f(x)$.

（3）$\left[ヒント：\int_a^{x^2} f(t)\,dt=S(x^2).\right]$　$2x\,f(x^2)$.

（4）$\left[ヒント：\int_{2x}^{x^2} f(t)\,dt=S(x^2)-S(2x).\right]$　$2x\,f(x^2)-2f(2x)$.

§ 41.　定積分の計算（p. 146 ～ p. 147）

問 1.（1）$-\dfrac{1}{12}(b-a)^4$.

（2）[ヒント：積分区間を [1, 2], [2, 3] に分けよ.]　5.

（3）[ヒント：積分区間を [0, 1], [1, 2] に分けよ.]　1.

（4）$\log\dfrac{4}{3}$.　（5）$-\dfrac{1}{8}\log 3$.　（6）$\dfrac{\pi}{4}$.

（7）$\left[ヒント：1+x+x^2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2.\right]$　$\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

（8）$\dfrac{5}{2}\log 2-\dfrac{3}{2}\log 3$.　（9）$\dfrac{14}{9}$.　(10)　$\dfrac{142}{105}$.

(11)　[ヒント：$\sqrt{x}=t$.]　$2\left(1-\log\dfrac{3}{2}\right)$.　(12)　$3-\sqrt{5}$.　(13)　$2\log(1+\sqrt{2})$.

(14)　[ヒント：$x=\sin t$ とおけ.]　$\dfrac{\pi}{16}$.　(15)　1.　(16)　$\dfrac{\pi}{2}$.

(17)　$\dfrac{4}{3}$.　(18)　$\dfrac{1}{2}\log 2$.　(19)　π.　(20)　$\dfrac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

(21)　$\left[ヒント：\int_0^{\pi}\sin^5 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5 x\,dx\right.$ に注意して，公式 (41.3) を用いよ.]
$\dfrac{16}{15}$.

(22)　$\left[ヒント：\int_0^{\pi}\cos^4 x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx\right.$ に注意して，公式 (41.3) を用いよ.]
$\dfrac{3\pi}{8}$.

(23)　$\dfrac{e^2-e^{-2}}{2}=\sinh 2$.　(24)　$\sinh a$.　(25)　$-3e^{-2}+1$.

(26)　$\log\dfrac{e^2+1}{e+1}$.　(27)　$2\log 2-1$.　(28)　$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$.

問 2.　$\left[ヒント：\dfrac{1}{k}<\int_{k-1}^{k}\dfrac{dx}{x}\quad(k=2, 3, \cdots, n).\right]$

問 3.（1）$\left[ヒント：\int_k^{k+1}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}<\dfrac{1}{k^{\alpha}}\quad(k=1, 2, \cdots, n).\right]$

（2）$\left[ヒント：\dfrac{1}{k^{\alpha}}<\int_{k-1}^{k}\dfrac{dx}{x^{\alpha}}\quad(k=2, 3, \cdots, n).\right]$

問 4. (1) $\frac{2}{3}$. (2) $\frac{\pi}{2}$. (3) $\frac{\pi}{4}$.

§ 42. 平面図形の面積 (p. 151 ~ p. 152)

問 1. (1) $\frac{64}{3}$. (2) $\frac{8}{3}$. (3) $\frac{3}{10}$. (4) $\frac{3}{2}-\frac{1}{\log 2}$.

(5) $\frac{1}{4}(e^2-4e+5)$. (6) $\frac{a^2}{3}$. (7) $a^2\sinh\frac{b}{a}$. (8) 2.

(9) $2\sqrt{2}$.

問 2. πab.

問 3. πab.

問 4. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

問 5. $2a^2$.

問 6. $a^2\tan\frac{\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{3}\tan^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

§ 43. 立体の体積 (p. 155)

問 1. (1) $\frac{\pi}{3}a^2b^3$. (2) $\frac{4}{3}\pi ab^2$. (3) $\frac{\pi}{15}$.

(4) $\frac{\pi^2}{2}$. (5) $\frac{\pi a^3}{4}\left(\sinh\frac{2b}{a}+\frac{2b}{a}\right)$.

(6) $\left[\text{ヒント}: V=\pi\int_0^{2\pi} y^2\frac{dx}{dt}dt.\right]$ $5\pi^2a^3$. (7) $\frac{\pi}{2}$.

問 2. (1) $\left[\text{ヒント}: A(x)=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right).\right]$ $\frac{4}{3}\pi abc$.

(2) $\left[\text{ヒント}: A(x)=\frac{\pi bc}{a}x.\right]$ $\frac{\pi abc}{2}$.

§ 44. 曲線の長さと回転面の面積 (p. 163)

問 1. (1) $2\pi a$. (2) $\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})$. (3) $\frac{13\sqrt{13}-8}{27}$.

(4) $\log(2+\sqrt{3})$.

問 2. (1) $2\pi a$. (2) $\frac{l^2}{2a}$. (3) $6a$.

問 3. (1) πa. (2) $\frac{a}{2}\{\alpha\sqrt{1+\alpha^2}+\log(\alpha+\sqrt{1+\alpha^2})\}$.

(3) $\frac{\sqrt{1+(\log a)^2}}{\log a}$.

問 4. (1) $\pi a\sqrt{1+a^2}\cdot b^2$. (2) $\frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1)$. (3) $\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

(4) $2\pi\{\sqrt{2}+\log(1+\sqrt{2})\}$. (5) $\pi a\left(b+\frac{a}{2}\sinh\frac{2b}{a}\right)$.

第11章　広義の積分

§ 45.　有界でない関数の積分（p. 167）

問 1. （1）　10000.　（2）　存在しない.　（3）　$\frac{\pi}{2}$.　（4）　-1.

（5）　$\frac{\pi}{2}$.　（6）　$5-6\log 2$.　（7）　-4.　（8）　存在しない.

問 2. $\left[\text{ヒント：} \int_0^1 = \int_0^{\frac{1}{2}} + \int_{\frac{1}{2}}^1 .\right]$　$\alpha<1$,　$\beta<1$.

§ 46.　無 限 積 分（p. 171 ~ p. 172）

問 1. （1）　10000.　（2）　$\log 2$.　（3）　π.　（4）　$\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

（5）　存在しない.　（6）　$\frac{1}{2}\log 2$.　（7）　$2\log(\sqrt{2}+1)$.

（8）　［ヒント：極限値 $\lim_{X\to\infty}\cos X$ は存在しない.］　存在しない.　（9）　1.

（10）　［ヒント：(34.8)式（119 ページ）を用いよ.］　$\frac{b}{a^2+b^2}$.

問 2. ［ヒント：まず，$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{n-1}e^{-ax}\,dx$ をみちびけ.］　$\frac{n!}{a^{n+1}}$.

第12章　重 積 分

§ 48.　2 重積分と累次積分（p. 182 ~ p. 183）

問 1. （1）　$\frac{1}{2}(b-a)(d-c)(a+b+c+d+2)$.　（2）　$\frac{1}{8}$.　（3）　$\frac{1}{15}$.

（4）　$\frac{1}{6}$.　（5）　$\frac{3}{2}$.　（6）　$\frac{9}{4}$.　（7）　$\frac{1}{12}$.　（8）　$\frac{8}{3}$.

（9）　$\frac{1}{192}$.　（10）　$\frac{a^4}{8}$.　（11）　$\frac{\pi}{8}$.　（12）　$\frac{1}{3\sqrt{2}}$.　（13）　1.

（14）　$\frac{1}{6}(e^{2a}-1)(e^{3b}-1)$.　（15）　$\frac{(\beta-\alpha)a^2}{2}$.　（16）　$\frac{\pi a^2}{4}$.　（17）　$6\pi a^2$.

問 2. （1）　$\int_0^2 dy\int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int_2^3 dy\int_{\frac{y}{3}}^1 f(x,y)\,dx$.

（2）　$\int_4^6 dx\int_2^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dy + \int_6^9 dx\int_{\frac{x}{3}}^3 f(x,y)\,dy$.

（3）　$\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\,dx$.

（4）　$\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int_1^2 dy\int_0^{2-y} f(x,y)\,dx$.

（5）　$\int_0^{\frac{1}{e}} dy\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx + \int_{\frac{1}{e}}^e dy\int_{\log y}^1 f(x,y)\,dx$.

（6） $\int_0^{2a} dr \int_0^{\cos^{-1}\frac{r}{2a}} f(r, \theta)\, d\theta.$

問 3. [ヒント: 積分の順序を変更せよ.]

§ 49. 積分変数の変換 (p. 190 ~ p. 191)

問 1. （1） $\dfrac{\pi a^2}{4}.$ （2） $\dfrac{a^4}{8}.$ （3） $\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$

（4） $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\sec\theta} r\, dr = \dfrac{1}{2}.$ （5） $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\operatorname{cosec}\theta} r\, dr = \dfrac{1}{2}.$

（6） $2\pi \log \dfrac{b}{a}.$ （7） $\dfrac{2}{3}\pi a^3.$ （8） $\dfrac{1}{16}\pi^2 a^2.$

問 2. （1） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\, dr.$

（2） $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{a\sec\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\, dr$

$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a\operatorname{cosec}\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)\, r\, dr.$

問 3. （1） $\dfrac{a^4}{8}.$ （2） $\dfrac{\pi}{2}a^4.$ （3） $\pi a^3.$

（4） $\dfrac{2}{9}(3\pi-4)a^3.$ （5） [ヒント: 例 2 参照.] $\pi.$

問 4. [ヒント: 2 重積分の積分変数の変換公式.]

問 5. [ヒント: 2 重積分の積分変数の変換公式.] $\dfrac{\pi^2}{2}.$

§ 50. 3 重積分 (p. 195 ~ p. 196)

問 1. （1） $\int_0^{a} dz \int_0^{a-z} dy \int_0^{a-z-y} dx = \dfrac{a^3}{6}.$ （2） $\dfrac{a^4}{24}.$

（3） $\int_{-a}^{a} dz \int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} dx = \dfrac{4}{3}\pi a^3.$

（4） $\int_{-c}^{c} dz \int_{-b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}}} dx = \dfrac{4}{3}\pi abc.$

問 2. （1） $2\pi a^2 b.$ （2） $\dfrac{2(3\pi-4)}{9}a^3.$

問 3. （1） $\dfrac{2}{3}\pi a^3(1-\cos\alpha).$ （2） $\dfrac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\alpha).$

§ 51. 曲面積 (p. 199)

問. （1） $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2.$ （2） $\dfrac{2\pi}{3}\{\sqrt{(1+a^2)^3}-1\}.$

（3） $\dfrac{\pi}{4}\{a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})\}.$ （4） $2(\pi-2)a^2.$

第13章　微分方程式

§52.　変数分離形（p. 201 ～ p. 202）

問.　(1)　$y^2=Cx$.　(2)　$x^2+y^2=C$.　(3)　$xy=C$.

(4)　$y=1+Cx$.　(5)　$(x-1)^2+(y+1)^2=C$.

(6)　$3y^2=2x^3+18x+C$.　(7)　$xy=Ce^{y-x}$.

(8)　$\sec x+\tan y=C$.

§53.　同次形（p. 205）

問.　(1)　$x^2+y^2=Cx$　$(C\neq 0)$.　(2)　$y=Ce^{\frac{y}{x}}$.　(3)　$\frac{1}{3}x^3-xy^2=C$.

(4)　$y-x=Ce^{\frac{x}{y-x}}$.　(5)　$x^2-2xy-y^2=C$.　(6)　$2y=Cx^2-\frac{1}{C}$.

(7)　$\cos\frac{y}{x}=Cx$.　(8)　$\tan\frac{y}{2x}=Cx$.

§54.　完全形（p. 208）

問.　(1)　$x\sin y=C$.　(2)　$\sin x\cosh y=C$.

(3)　$x^2-xy+y^2+x-y=C$.　(4)　$x^3+3x^2y-y^3=C$.

(5)　$x^2y^3+x^3y=C$.　(6)　$e^x\cos y=C$.　(7)　$xe^y=C$.

(8)　$y\log|x|=C$.

§55.　1階線形方程式（p. 211）

問.　(1)　$y=Ce^{-x}+x-1$.　(2)　$y=\frac{C}{x}+\frac{x}{2}$.　(3)　$y=\frac{C}{x}+\frac{1}{3}x^2$.

(4)　$y=Ce^x-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$.　(5)　$y=Ce^{\frac{x^2}{2}}-1$.

(6)　$y=C\cos x+\sin x$.　(7)　$y=\frac{\sin x+C}{x}$.

(8)　[ヒント：$\tan y=u$ とおけ.]　$\tan y=Ce^{-x}+x-1$.

§56.　2階線形同次方程式（p. 214）

問.　(1)　$y=Ae^{2x}+Be^{-x}$.　(2)　$y=e^{3x}(Ax+B)$.

(3)　$y=e^x(A\cos x+B\sin x)$.　(4)　$y=Ae^x+Be^{-6x}$.

(5)　$y=e^{\frac{3}{2}x}(Ax+B)$.　(6)　$y=e^{-x}(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

(7)　$y=A+Be^{ax}$.　(8)　$y=A\cos ax+B\sin ax$.

§57.　2階線形非同次方程式（p. 216）

問.　(1)　$y=Ae^{2x}+Be^x+x+1$.

(2)　$y=e^x(A\cos x+B\sin x)+\frac{x^2}{2}+x$.

(3)　$y=Ae^{2x}+Be^{4x}-e^{3x}$.　(4)　$y=e^{2x}(Ax+B)+e^x$.

(5)　$y=e^{-4x}(A\cos x+B\sin x)+e^{-3x}$.

(6)　$y=A\cos x+B\sin x+x\sin x$.

(7)　$y=Ae^{2x}+Be^{-x}+\frac{1}{10}(\cos x-3\sin x)$.

(8)　$y=e^x(A\cos x+B\sin x)+xe^x\sin x$.

第14章　数列と級数

§58．無限数列 (p. 220 ～ p. 221)

問 1. （1） ∞.　（2） 振動.　（3） 0.　（4） $-\frac{1}{3}$.　（5） $\frac{1}{2}$.

（6） 0.　（7） ∞.　（8） 0.　（9） $\frac{1}{3}$.　(10) 0.　(11) 振動.

(12) 0.　(13) ∞.　(14) ∞.　(15) 0.　(16) 1.　(17) 振動.

(18) $\left[\text{ヒント: 2 項定理によって, } 2^n=(1+1)^n>1+n+\frac{n(n-1)}{2}.\right]$ ∞.

(19) [ヒント: $\sqrt[n]{n}=1+h_n$ $(h_n>0)$ とおけば, 2 項定理によって,

$n=(1+h_n)^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$.] 1.

(20) $\left[\text{ヒント: } 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.\right]$ $\frac{1}{2}$.

問 2. （1） 正しくない. 反例: $a_n=n^2$, $b_n=n$.

（2） 正しい.

（3） 正しくない. 反例: $a_n=-n$, $b_n=n^2$.

§59．無限級数 (p. 223)

問 1. （1） ∞.　（2） 発散(振動).

（3） $\left[\text{ヒント: } \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}.\right]$ 1.

（4） [ヒント: 定理 59.1.] ∞.　（5） [ヒント: (3) にならえ.] $\frac{1}{2}$.

（6） $\left[\text{ヒント: } \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n-1}}=\frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{2}.\right]$ ∞.

[ヒント: (7)～(10) は等比級数.]

（7） $\frac{81}{2}$.　（8） 発散(振動).　（9） $\frac{3}{5}$.　(10) $\frac{3}{\sqrt{3}+1}$.

§60．正項級数 (p. 227 ～ p. 228)

問 1. （1） 発散.　（2） 収束.　（3） 収束.

（4） 発散.　（5） 収束.

（6） $\left[\text{ヒント: } \frac{\log x}{x}\to 0 \ (x\to\infty).\ \therefore\ \frac{1}{\log n}>\frac{1}{n} \ (n\geqq n_0).\right]$ 発散.

（7） [ヒント: $\log n<\sqrt{n}$ $(n\geqq n_0)$.] 収束.

（8） [ヒント: §20 の例 1 (70 ページ) によって, $\sin\frac{\pi}{n}\geqq\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}$ $(n\geqq 2)$.] 発散.

問 2. （1） 収束.　（2） 収束.

問 3. （1） 収束.　（2） 発散.　（3） 収束.

§61. 交代級数 (p. 229)

問. (1) 発散.　(2) 収束.　(3) 収束.　(4) 発散.

§62. 絶対収束級数 (p. 230)

問. (1) 絶対収束.　(2) 条件収束.　(3) 条件収束.　(4) 絶対収束.

(5) $\left[\text{ヒント}: \left|\dfrac{1}{(-2)^n+1}\right|<2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n.\right]$ 絶対収束.

(6) $\left[\text{ヒント}: \left|(-1)^{n-1}\sin^2\dfrac{1}{n}\right|<\dfrac{1}{n^2}.\right]$ 絶対収束.

§63. べき級数 (p. 235)

問 1. (1) ∞.　(2) $\dfrac{1}{2}$.　(3) ∞.

(4) [ヒント: $a_{3n}=(-2)^n$ に注意.] $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

問 2. (1) 1.　(2) 3.　(3) 4.　(4) 1.　(5) $\dfrac{1}{3}$.

(6) [ヒント: $x^2=t$ のべき級数と考えよ.] $\dfrac{1}{2}$.

§64. べき級数の微分と積分 (p. 239)

問 1. (1) $\dfrac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2-\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}+\cdots \quad (|x|<1).$

(2) $\dfrac{1}{(1-x)^3}=\dfrac{1}{2}(2\cdot1+3\cdot2x+\cdots+n(n-1)x^{n-2}+\cdots) \quad (|x|<1).$

(3) $\dfrac{1}{(1+x^2)^2}=1-2x^2+3x^4-\cdots+(-1)^{n-1}nx^{2n-2}+\cdots \quad (|x|<1).$

問 2. (1) $\log(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots \quad (|x|<1).$

(2) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x}{1-x}=x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad (|x|<1).$

(3) $\log(x+\sqrt{1+x^2})=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}\cdot\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x|<1).$

ギリシャ文字

本書は，初心者向けの教科書であるので，ギリシャ文字を使うことをできるだけさけたが，今後，より程度の高い数学の勉強のためには，ギリシャ文字の使用はさけがたい．そこで，ギリシャ文字についての必要事項をのせておく．

	大文字	小文字	対応する英文字	英語名（英式）	発音（英式）
1	A	α	a	alpha	[ǽlfə]
2	B	β	b	beta	[bíːta]
3	Γ	γ	g	gamma	[gǽmə]
4	Δ	δ	d	delta	[déltə]
5	E	ε	e	epsilon	[ipsáilən, épsilɔn]
6	Z	ζ	z	zeta	[zíːtə]
7	H	η	ē	eta	[íːta]
8	Θ	θ, ϑ	th	theta	[θíːtə]
9	I	ι	i	iota	[aióutə]
10	K	κ	k	kappa	[kǽpə]
11	Λ	λ	l	lambda	[lǽmdə]
12	M	μ	m	mu	[mjuː]
13	N	ν	n	nu	[njuː]
14	Ξ	ξ	x	xi	[ksiː,(g)zai]
15	O	o	o	omicron	[o(u)máikrən]
16	Π	π	p	pi	[pai]
17	P	ρ	r	rho	[rou]
18	Σ	σ, ς	s	sigma	[sígmə]
19	T	τ	t	tau	[tau, tɔː]
20	Υ	υ	y(u)	upsilon	[juːpsáilən, júːpsilɔn]
21	Φ	ϕ, φ	ph	phi	[fai]
22	X	χ	ch	chi	[kai]
23	Ψ	ψ, ψ	ps	psi	[(p)sai]
24	Ω	ω	ō	omega	[óumigə, ɔ́migə]

索　引

あ　行

か　行

さ　行

た　行

な　行

は　行

ま　行

や　行

ら　行

わ　行

水本久夫 略歴

(みず もと ひさ お)

1953年 金沢大学理学部数学科卒業
1958年 東京工業大学大学院理工学研究科
博士課程修了（理学博士）
東京工業大学助手
1961年 岡山大学助教授
1966年 岡山大学教授
1977年 広島大学教授（総合科学部）
1991年 広島大学名誉教授
川崎医療福祉大学教授
2001年 川崎医療福祉大学名誉教授

主要著書

多様体上の差分法（教育出版，1973）
工業数学（I）（森北出版，1976）
工業数学（II）（森北出版，1977）
関数論（朝倉書店，1979）
エンジニアリングサイエンスのための有限要素法
理論篇，プログラム篇（共著，森北出版，1982）
ラプラス変換入門（森北出版，1984）
FORTRANによる境界要素法の基礎
（共著，サイエンス社，1985）
FORTRANによる数値計算法入門
（共著，近代科学社，1986）
パソコンによる数値計算法入門
（共著，近代科学社，1986）
教養数学の基礎（培風館，1987）
解析学の基礎（培風館，1989）
線形代数学問題集 改訂版（培風館，1990）
微分積分と線形代数の基礎（培風館，1992）
微分方程式の基礎（培風館，1992）
統計の基礎（培風館，1994）
微分積分学問題集 改訂版（培風館，1994）
基本線形代数（培風館，1995）
有限要素法へのいざない（培風館，1995）
基本微分積分（培風館，1996）
複素関数論の基礎（培風館，1996）
線形代数学の基礎 三訂版（培風館，2000）
ベクトル解析の基礎（培風館，2001）

1983年1月20日 初版発行
1993年3月20日 改訂版発行
2011年9月30日 改訂第28刷発行

微分積分学の基礎

著　者 水本久夫
発行者 山本　格

発行所 株式会社 培風館
東京都千代田区九段南4-3-12・郵便番号102-8260
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

前田印刷・牧製本

PRINTED IN JAPAN

ISBN978-4-563-00222-0 C3041